Première ~ Spécialité
Equations du second degré

1 Fonctions polynômes

Définition 1 On appelle fonction **polynôme de degré** n toute fonction définie sur $\mathbb{R}$, de la forme $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, où les coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des réels et $a_n \neq 0$. Le nombre n est appelé le **degré** du polynôme.

Exemple 1 Les fonctions **affines** sont des fonctions polynômes du premier degré.

Exemple 2 La fonction qui à tout réel x associe $P_1(x) = 2x^{13} + 26x^5 - 8x^2 + 1$ définit un polynôme de degré 13.

Définition 2 On appelle fonction **polynôme du second degré ou trinôme du second degré** toute fonction définie sur $\mathbb{R}$, de la forme $P(x) = ax^2 + bx + c$ où les les coefficients a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$.

Remarque 1

L'écriture $P(x) = ax^2 + bx + c$ est appelée forme développée du trinôme. En effet, une forme développée est une forme qui correspond à une somme.

Remarque 2

Des trajectoires de projectiles aux calculs d'aires optimales en architecture, en passant par la maximisation de bénéfices en économie ou l'analyse de phénomènes naturels, les fonctions polynômes du second degré apparaissent dans une multitude de problèmes concrets et variés. Ce chapitre est donc très riche en applications !

2 Forme canonique d'un trinôme du 2^{nd} degré

Définition 3 Soit f un trinôme du 2^{nd} degré tel que pour tout réel x, $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Il existe deux uniques réels α et β tels que pour tout réel x : $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ où $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.
On dit alors que $a(x-\alpha)^2 + \beta$ est la **forme canonique** de $f(x)$.

Preuve:

$$\begin{array}{rcl}
f(x) & = & ax^2 + bx + c \\
 & = & a\left(x^2 + \dfrac{b}{a}x\right) + c \\
 & = & a\left(x^2 + \dfrac{b}{a}x + \left(\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \left(\dfrac{b}{2a}\right)^2\right) + c \\
 & = & a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \left(\dfrac{b}{2a}\right)^2\right] + c \\
 & = & a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - a\dfrac{b^2}{4a^2} + c \\
 & = & a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2}{4a} + c \\
 & = & a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a}
\end{array}$$

On a donc bien $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$.

Remarque 3

Exercice 1

Déterminer la forme canonique de $f(x) = 3x^2 - 12x + 1$

Correction

Remarque 4

Que signifie le terme **"canonique"** ?

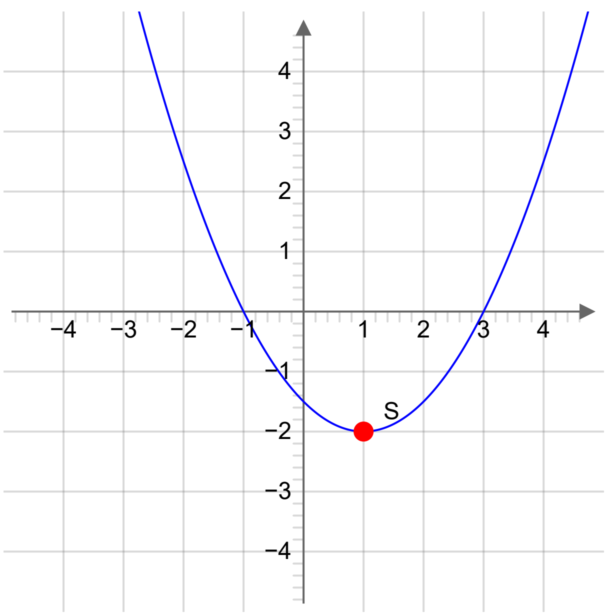
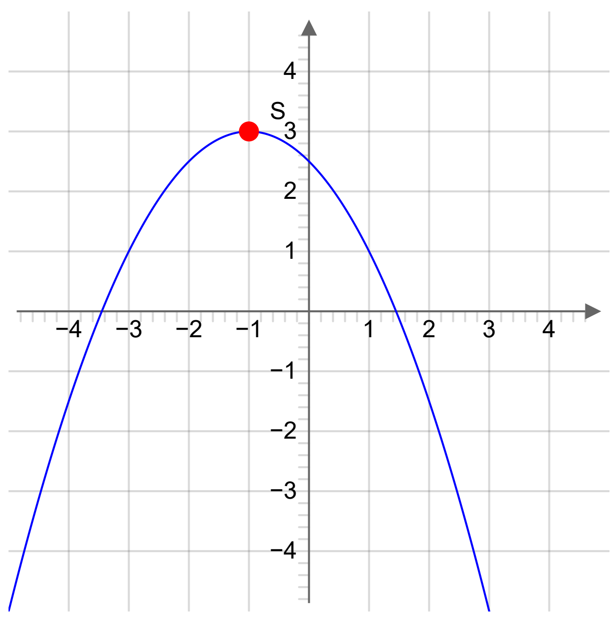
Ici, le terme "canonique" évoque une forme standardisée qui permet de classer tous les trinômes du second degré en fonction de critères comme on va le démontrer ultérieurement dans ce chapitre.

3 Paraboles

Définition 4 Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ une fonction polynôme du second degré et C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

C_f est appelée **parabole** de sommet $S(\alpha; \beta)$ où $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$.

Propriété 1

$a > 0$	$a < 0$
La parabole est **ouverte vers le haut**. Le sommet est un **minimum** de la fonction. 	La parabole est **ouverte vers le bas**. Le sommet est un **maximum** de la fonction. 

Preuve
L'étude du sens de variation est traité au prochain chapitre.

Propriété 2 Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ une fonction polynôme du second degré de forme canonique $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ et soit C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal.
Alors C_f est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \alpha$.

Preuve
La preuve sera traitée en exercice.

4 Sens de variations et extremum

Propriété 3 Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ une fonction polynôme du second degré de forme canonique $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$.

Cas 1: Si $a > 0$, alors

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	β	$\nearrow$	

Ainsi, f atteint un minimum de β en $x = \alpha$.

Cas 2: Si $a < 0$, alors

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	β	$\searrow$	

Ainsi, f atteint un maximum de β en $x = \alpha$.

Preuve

Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ une fonction du second degré de forme canonique :

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta \quad \text{où} \quad \alpha = -\frac{b}{2a} \quad \text{et} \quad \beta = f(\alpha).$$

Supposons $a > 0$.

Considérons deux réels x_1 et x_2 tels que $x_1 < x_2 \leq \alpha$. Il vient donc :

$$x_1 - \alpha < x_2 - \alpha \leq 0$$

et comme $x \mapsto x^2$ est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$, on a :

$$(x_1 - \alpha)^2 > (x_2 - \alpha)^2.$$

En multipliant par $a > 0$ puis en ajoutant β, on obtient :

$$f(x_1) = a(x_1 - \alpha)^2 + \beta > a(x_2 - \alpha)^2 + \beta = f(x_2).$$

Cela montre que f est décroissante sur $]-\infty; \alpha]$.

Considérons maintenant deux réels x_1 et x_2 tels que $\alpha \leq x_1 < x_2$. On a :

$$0 \leq x_1 - \alpha < x_2 - \alpha,$$

et comme $x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur $[0; +\infty[$, on a :

$$(x_1 - \alpha)^2 < (x_2 - \alpha)^2.$$

En multipliant par $a > 0$ puis en ajoutant β, on obtient :

$$f(x_1) < f(x_2),$$

ce qui montre que f est croissante sur $[\alpha; +\infty[$.

Pour $a < 0$, les inégalités sont inversées puisque la multiplication par un nombre négatif change le sens de l'inégalité.

5 Racines d'un polynôme et équations du second degré

Définition 5 On appelle **racine** d'un polynôme une valeur en laquelle ce polynôme s'annule.

Exemple 3

Tout polynôme de degré un de la forme $ax + b$ a pour unique racine $\frac{-b}{a}$.

Remarque 5

Chercher les racines d'un polynôme de degré n revient donc à résoudre une équation de degré n.

Propriété 4

Soit $ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré.

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$, ce nombre est appelé discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$ ou discriminant de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

- Si $\Delta > 0$, le trinôme a deux racines dites simples $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$,

  et se factorise en :

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

- Si $\Delta = 0$, le trinôme n'a qu'une racine dite double $x_0 = \frac{-b}{2a}$,

  et se factorise en :

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2.$$

- Si $\Delta < 0$, le trinôme n'a **pas de racines** et ne se factorise pas.

Démonstration. Soit $ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré.

Posons $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$, on peut alors écrire que $\Delta = \left(\sqrt{\Delta}\right)^2$, puis

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right]$$

En utilisant la troisième identité remarquable,

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right] = a\left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

C'est une équation produit dont les solutions sont :

$$-\frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad -\frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

En posant

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

et

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

, on a bien :

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

- Si $\Delta = 0$, alors

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

En posant $x_0 = \frac{-b}{2a}$,

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$$

Donc :

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow (x - x_0)^2 = 0 \Leftrightarrow x = x_0$$

Ce qui prouve que l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet une unique solution $x_0 = \frac{-b}{2a}$.

- Si $\Delta < 0$, en écrivant que l'équation équivaut à

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-\Delta}{4a^2}$$

On constate qu'elle n'a pas de solution puisque d'une part

$$\frac{-\Delta}{4a^2} < 0$$

et d'autre part

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$$

un carré étant toujours positif.

De plus dans ce cas, le trinôme ne se factorise pas sinon on pourrait l'écrire sous la forme

$$a(x-\ldots)(x-\ldots)$$

et donc l'équation

$$ax^2+bx+c=0$$

aurait deux solutions, ce qui contredit ce qui précède.

Propriété 5 Soient a, b et c trois nombres réels avec $a \neq 0$.

On considère le polynôme $P(x)=ax^2+bx+c$ et son discriminant $\Delta=b^2-4ac$.

- Si $\Delta<0$, le polynôme P est du signe de a sur $\mathbb{R}$.
- Si $\Delta=0$, le polynôme P est du signe de a sur $\mathbb{R}$ et il s'annule en $x=-\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta>0$, le polynôme P est du signe de a à l'extérieur de ses racines x_1 et x_2 et du signe opposé entre elles.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$P(x)$		signe(a)	0	signe(-a)	0	signe(a)	

Exercice 2

Résoudre $x^2-3x+1>0$.

Correction

Propriété 6 Soit ax^2+bx+c un trinôme du second degré ayant deux racines.

Alors la somme S et le produit P de ces racines vérifient
$S=\dfrac{-b}{a}$ et $P=\dfrac{c}{a}$.

Remarque 6

Cette propriété est pratique pour déterminer des racines évidentes ou pour déterminer la seconde racine quand on en a déjà trouvé une.

Exercice 3

Soit f le trinôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par la relation $f(x)=2x^2-5x+3$.

1. Calculer la somme S et le produit P de ses racines sans les résoudre directement.
2. Vérifier que $x=1$ est une racine évidente de f.
3. En utilisant la remarque précédente, déterminer la seconde racine du trinôme sans développer de calculs compliqués et résoudre complètement l'équation $f(x)=0$.

Correction

FIN DU CHAPITRE 🥳