Variables aléatoires

Exercice 1

Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau ci-dessous :

k	-1	0	2	10
$P(X=k)$	$0,40$	$0,25$	$0,20$	

1. Compléter le tableau.
2. Calculer l'espérance de X. Interpréter le résultat.
3. Déterminer $P(X \leq 0)$, $P(X \leq 1)$ et $P(X > -1)$.

Exercice 2

L'un des jeux à gratter les plus populaires de la Française des Jeux, dont le ticket coûte 2 €, a ses gains répartis de la façon suivante :

Gain en €	Nombre de tickets
$20\,000$	4
$1\,000$	9
200	415
30	$2\,112$
18	$44\,992$
8	$225\,008$
4	$450\,008$
2	$657\,544$
0	$31\,259\,908$

Soit G la variable aléatoire donnant le gain d'un joueur qui a gratté un ticket de ce jeu.
Pour les a) et b), on donnera les résultats à 10^{-8} près.

a. Donner $P(G = 20\,000)$ et $P(G = 0)$.
b. Déterminer $P(G \geq 2)$ et interpréter le résultat.
c. Calculer l'espérance $\mathrm{E}(G)$ de la variable G et conclure.
d. La Française des Jeux affirme redistribuer au moins $10\ \%$ des gains de ce jeu aux joueurs. Est-ce vrai ?

Exercice 3

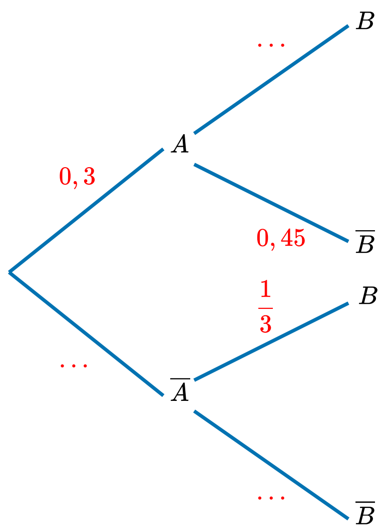
On lance simultanément deux dés équilibrés et on considère la variable aléatoire S qui donne la somme des numéros des deux faces obtenues.
On souhaite saisir une formule dans la cellule B2 du tableur ci-dessous pour qu'en tirant vers la droite et le bas, on affiche tous les résultats possibles de S.

	A	B	C	D	E	F	G
1		1	2	3	4	5	6
2	1						
3	2						
4	3						
5	4						
6	5						
7	6						

1. Une personne propose de saisir dans B2 la formule « = A2+B1 » mais les résultats affichés ne sont pas corrects. Comment modifier cette formule pour répondre au problème ?
2. Donner la loi de probabilité de S (on pourra s'aider du tableur).
3. Calculer $\mathrm{E}(S)$ et commenter le résultat.
4. Donner $P(S \geq 3)$ et $P(5 \leq S \leq 9)$.
5. On désire transformer ce jeu en un jeu d'argent tel que si un joueur obtient 12 alors il gagne 90 € et 0 € pour tout autre résultat.
   Quel prix maximum le joueur doit-il débourser pour que le jeu lui soit favorable ?

Exercice 4

Soient A et B deux évènements d'un même univers.
On considère l'arbre de probabilité ci-dessous :



1. Compléter l'arbre.
2. Les évènements A et B sont-ils indépendants ?
3. Déterminer, à 10^{-3} près, $P(A \cap B)$, $P(\overline{A} \cap B)$.

Exercice 5

Dire si les situations suivantes sont des épreuves de Bernoulli.

a. « On lance un dé équilibré et on regarde si on tombe sur un numéro pair. »
b. « On lance un dé équilibré et on le note le numéro obtenu. »

c. « Parmi l'ensemble des foyers fiscaux d'une municipalité, on note, en en choisissant un au hasard, le nombre d'enfants de ce dernier. »
d. « Parmi tous les dossiers de ses patients, un médecin en choisit un au hasard et regarde si il correspond à un patient majeur. »

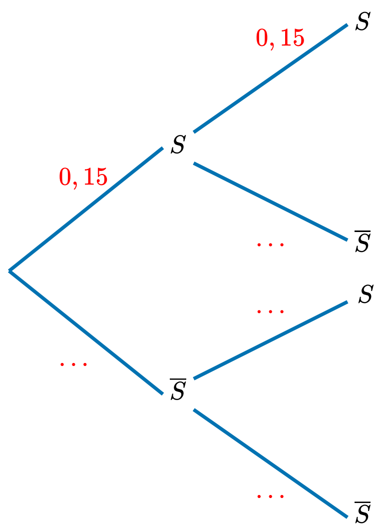
Exercice 6

Dire si les situations suivantes sont des schémas des Bernoulli :

a. « On lance 5 fois une pièce de monnaie équilibrée et on regarde, à chaque lancer si on obtient pile ou non. »
b. « Une urne contient 10 boules bleues et 10 boules blanches.
On tire sans remettre dans l'urne une boule au hasard et on regarde si elle est bleue ou non.
On répète 3 fois ce tirage. »
c. « Une urne contient 10 boules bleues et 10 boules blanches.
On tire dans l'urne une boule au hasard et on regarde si elle est bleue ou non. On remet ensuite la boule dans l'urne.
On répète 3 fois ce tirage. »

Exercice 7

L'arbre de probabilité ci-dessous correspond à un schéma de Bernoulli de paramètres 2 et $0,15$.



1. Compléter l'arbre.
2. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès S.
   a. Déterminer $P(X=0)$ et $P(X>0)$.
   b. Donner la loi de probabilité de X.
   c. Calculer $\mathrm{E}(X)$.

Exercice 8

Un laboratoire développe un test de détection rapide pour un virus respiratoire.
Ce test a été évalué sur une large population : il détecte la présence du virus dans $90\,\%$ des cas lorsqu'il est effectivement présent.
Un centre de dépistage veut confirmer le bon fonctionnement de ce test et décide de l'utiliser sur 3 patients infectés.

1. On suppose que les tests sont indépendants les uns des autres.
   On appelle « succès » le fait que le test détecte bien le virus (donne un résultat positif chez un patient infecté) et on note S cet évènement.
   a. Sommes-nous en présence d'un schéma de Bernoulli ?
   b. Calculer $P(S)$ et $P(\overline{S})$.
2. Construire l'arbre de probabilité modélisant les 3 tests consécutifs.
3. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de tests positifs (détections réussies) parmi les 3.
   Quelles sont les valeurs possibles prises par X ?

4. Compléter le tableau de la loi de probabilité de X :

k	0	1	2	3
$P(X=k)$	...	...	...	...

5. Calculer l’espérance $\mathrm{E}(X)$ de la variable aléatoire X.
6. Interpréter ce résultat dans le contexte de l’exercice.

Exercice 9

On suppose que chacun des deux moteurs d'un avion bimoteur tombe en panne avec une probabilité de $0,001$, de façon indépendante l'un de l'autre.
Cet avion peut voler si au moins un des deux moteurs fonctionne.
On note M_1 et M_2 les évènements : « Le moteur 1 tombe en panne » et « Le moteur 2 tombe en panne ».

1. Sommes-nous en présence d'un schéma de Bernoulli ?
2. Construire un arbre de probabilité illustrant la situation.
3. Déterminer $P(M_1 \cap M_2)$.
4. Cet avion doit effectuer un trajet. Quelle est la probabilité qu'il arrive à bon port ?
5. Après exécution, l'algorithme ci-dessous affiche $607\,019$. Interpréter ce résultat.

```python
from random import*
vol = 0
while random() > 0.000001:
    vol = vol+1
print(vol)
```