Dérivation

Exercice 1

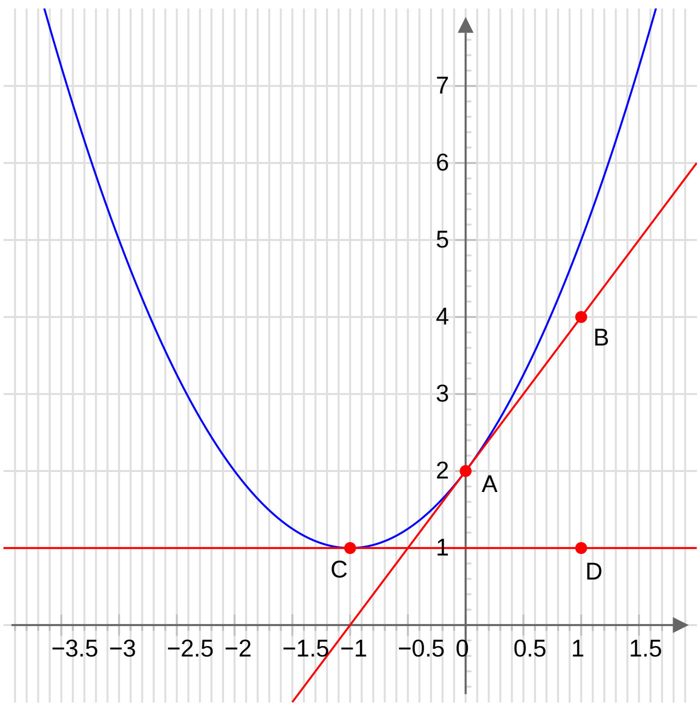
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 1$.

1. Calculer le taux de variation de f entre 2 et $2,01$.
   Expliquer pourquoi le résultat est proche 12.
2. Dire ce que calcule l'algorithme ci-dessous.

```python
def f(x):
    return x**3+1
def df(x):
    y = x+10**(-9)
    return (f(y)-f(x))/(y-x)
print(df(2))
print(df(-3))
```

Exercice 2

On a tracé dans le repère ci-dessous courbe $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f et deux de ses tangentes (AB) et (CD).
Les points A, B, C et D sont à coordonnées entières.



1. Déterminer à l'aide du graphique : $f(-1)$, $f'(-1)$, $f(0)$ et $f'(0)$.
2. Donner les équations réduites de (AB) et (CD).

Exercice 3

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 2x - 3$
2. $g(x) = -7x + 13$

3. $h(x) = x^2 - 5x + 1$
4. $i(x) = -0,5x^2 + x - 7$
5. $j(x) = (x+3)(3x-4)$
6. $k(x) = x^3 - 9x^2 + 9$
7. $\ell(x) = -4x^3 + \dfrac{1}{4}x^2 + x + 10$
8. $m(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 + 13x + 1\,993$0
9. $n(x) = x^2(1-2x)$
10. $o(x) = x(3x+4)^2$
11. $p(x) = 100x(3x+4)^2$

Exercice 4

Soit h la fonction définie pour tout $t \in [5\,;\,30]$ par $h(t) = 0,1t^2 - 2t + 1$.

1. Déterminer $h'(t)$.
2. Dresser le tableau de variations de h sur $[5\,;\,30]$.
3. Pour quelles valeurs de t le maximum et le minimum de h sont-ils atteints sur $[5\,;\,30]$?

Exercice 5

Soit g la fonction définie pour tout $x \in [-10\,;\,10]$ par $g(x) = 0,5(x-3)(x+4)$.

1. Trouver les racines de g.
2. Déterminer $g'(x)$.
3. Dresser le tableau de variations de g sur $[-10\,;\,10]$.
4. Pour quelles valeurs de x le maximum et le minimum de g sont-ils atteints sur $[-10\,;\,10]$?

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $[0\,;10]$ par $f(x) = x^3 - 6x^2 - 36x + 10$.

1. Déterminer pour tout $x \in [0\,;10]$ l'expression de $f'(x)$.
2. Montrer que $f'(x) = 3(x-6)(x+2)$.
3. Dresser alors le tableau de variations de f sur $[0\,;10]$.

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $[-2\,;5]$ par $f(x) = -x^3 - 0,2x^2 + 1,6x - 4$.

1. Montrer que : $f'(x) = 0,2(2-3x)(5x+4)$.
2. Montrer que $f'(x) = 3(x-6)(x+2)$.
3. Dresser le tableau de variations de f sur $[-2\,;5]$.
4. Peut-on affirmer que $f\left(\dfrac{2}{3}\right)$ est le maximum de f sur $[-2\,;5]$.

Exercice 8

Un laboratoire produit un médicament. On note x le nombre de centaines de boîtes produites par mois, avec $x \in [0\,;\,40]$.
Le coût total de production mensuel (en milliers d'euros) est donné par :

$$C(x) = 0,04x^3 - 2,4x^2 + 21,2x + 50.$$

Chaque boîte est vendue 12 €.

1. Lorsque $x = 20$, combien de boîtes sont-elles produites ?
2. Donner la recette pour $3\,000$ boîtes vendues, puis le coût correspondant. Quel est alors le bénéfice réalisé par le laboratoire ?
3. On note $R(x)$ la recette réalisée pour une production de x milliers de boîtes.
   Expliquer pourquoi $R(x) = 1,2x$.
4. Justifier alors que le bénéfice réalisé pour un production de x milliers de boîtes est :

$$B(x) = -0,04x^3 + 2,4x^2 - 21x - 50.$$

5. Montrer que $B'(x) = -0,12(x-5)(x-35)$.
6. Dresser le tableau de variations de B sur $[0\,;\,40]$.
7. Déterminer le nombre de boîtes à produire chaque mois pour que le bénéfice soit maximal et donner alors la valeur du bénéfice maximal.