

Probabilités

Exercice 1

Un restaurant propose dans son menu trois formules :

- Formule A : entrée plus plat
- Formule B : plat plus dessert
- formule C : entrée plus plat plus dessert

Les effectifs sont répertoriés dans le tableau ci-dessous.

	Formule A	Formule B	Formule C	Total
Déjeuner	27			75
Dîner			53	85
Total	39	51		160

On choisit la fiche d'un client au hasard et on définit les événements suivants :

- A : « le client a choisi la formule A » ;
- B : « le client a choisi la formule B » ;
- C : « le client a choisi la formule C » ;
- M : « le client est venu pour le déjeuner » ;
- A : « le client est venu pour le dîner ».

1. Compléter le tableau.
2. Calculer $P(A)$ et $P(S)$. Interpréter les résultats.
3. Définir par une phrase l'évènement \overline{A} puis calculer $P(\overline{A})$.
4. Calculer $P(A \cap S)$ et interpréter le résultat.
5. Calculer $P(A \cup S)$ et interpréter le résultat.
6. Calculer $P_S(A)$ et interpréter le résultat.
7. Calculer $P_A(S)$ et interpréter le résultat.
8. Calculer $\frac{P(A \cap S)}{P(S)}$. Que remarque-t-on ?

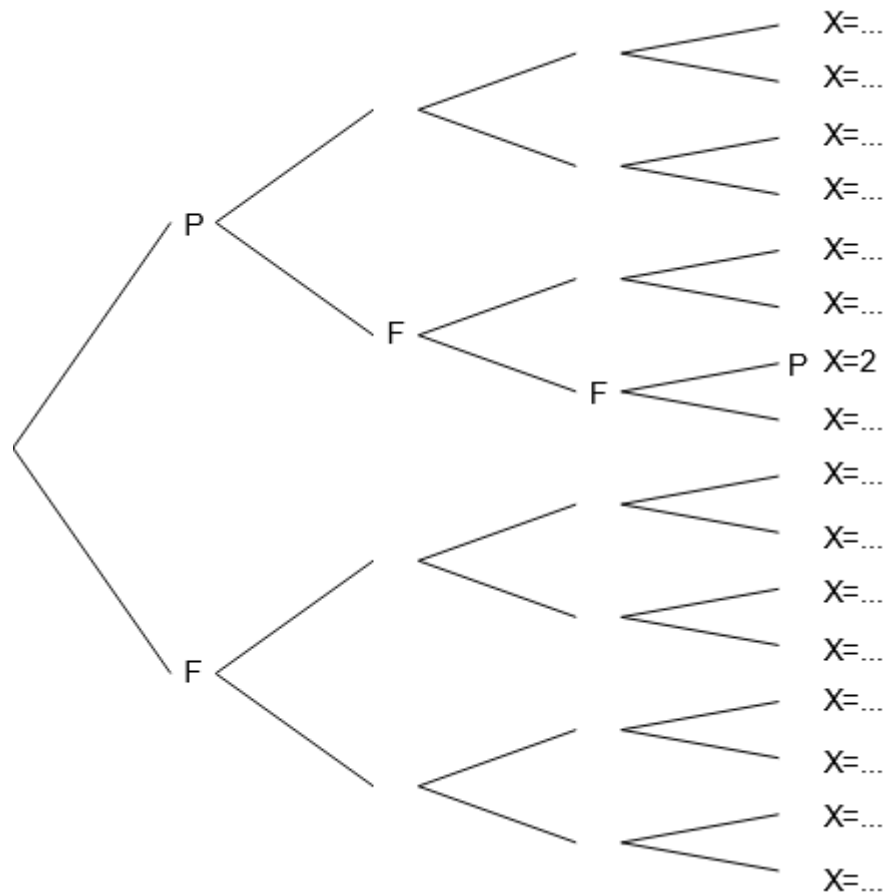
Exercice 2

On lance une pièce de monnaie équilibrée quatre fois à la suite et on compte combien de fois on obtient pile parmi ces quatre lancers.

On note X le nombre de piles obtenu. Ainsi, X peut valoir 0 si aucun pile n'a été obtenu sur les quatre lancers.

Mais on peut avoir également $X = 1$, si parmi les quatre lancers un seul pile est obtenu. Et de même $X = 2$ si obtient deux piles, $X = 3$ pour trois piles et $X = 4$ pour quatre piles.

1. Compléter l'arbre ci-dessous qui représente l'ensemble des possibilités de cette expérience aléatoire et donne au bout de chacune de ses branches le nombres de piles obtenus.



- Déterminer la probabilité de l'évènement « n'obtenir aucun pile », c'est-à-dire la valeur de $P(X = 0)$.
- Compléter le tableau ci-dessous :

k	0	1	2	3	4
$P(X = k)$	$\frac{1}{16}$				

- Calculer $P(X \geq 3)$ et $P(X > 0)$.
- Au premier lancer on obtient pile. Quelle est alors la probabilité d'obtenir au final 4 piles.

Exercice 3

On tire une boule dans une urne qui contient 10 boules bleues numérotées de 0 à 9 et 5 boules blanches numérotées de 1 à 5.

On note B l'évènement « la boule tirée est bleue » et D l'évènement « la boule tirée porte un numéro pair ».

- Calculer $P(B)$ et $P(D)$.
- Calculer $P(B \cap D)$ et $P(B \cup D)$.
- Une personne tire une boule et annonce que le numéro qu'elle porte est pair. Quelle est la probabilité qu'elle soit bleue ?
- Une autre personne tire une boule et annonce qu'elle est blanche. Quelle est la probabilité qu'elle porte un numéro pair ?

Exercice 4

De juillet à novembre 2020, 43 448 personnes ont participé à un test pour un vaccin contre le Covid-19. Parmi celles-ci 21 720 ont reçu le vaccin et les autres un placebo.

Durant le temps de l'étude, parmi les personnes vaccinées, 8 ont été contaminées au Covi-19 alors qu'elles étaient au nombre de 162 dans le groupe ayant reçu le placebo.

Dans ce groupe de personnes contaminées, une seule a développé une forme sévère parmi les vaccinées alors que 9 l'ont été dans le groupe ayant reçu le placebo.

On choisit au hasard une personne de cette étude et on définit les évènements suivants :

- V : « La personne est vaccinée » ;
- C : « La personne a été contaminée par le Covid-19 » ;
- G : « La personne a développé une forme grave du Covid-19 ».

Pour les questions qui suivent les résultats seront donnés à 10^{-6} près.

1. Déterminer $P(V)$ et $P(\overline{V})$.
2. Calculer $P_V(C)$ et $P_V(G)$. Interpréter les résultats.
3. Une personne ayant participé à l'étude affirme avoir été contaminée au Covid-19 en novembre 2020. Quelle est la probabilité que cette personne ait été vaccinée ?

Exercice 5

Une intelligence artificielle a été programmée pour détecter des chats sur des images.

On la teste sur un échantillon de 3 000 images qu'elle n'a pas encore traitées.

	L'image contient un chat	L'image ne contient pas de chat	Total
L'IA détecte un chat	1 403		
L'IA ne détecte pas de chat		1 457	
Total	1 500	1 500	

On choisit une image au hasard dans le lot testé et on note C l'évènement « L'image contient un chat » et D « L'IA détecte un chat ».

1. Compléter le tableau.
2. Déterminer la sensibilité de cette IA, à savoir, $P(C \cap D) + P(\overline{C} \cap \overline{D})$.
3. Donner la probabilité d'obtenir un faux positif $P_{\overline{C}}(D)$.
4. Déterminer l'efficacité de cette IA, à savoir la probabilité de détecter un chat sachant que l'image en contient un.
5. Déterminer le taux de prédiction de cette IA, à savoir la probabilité de ne pas détecter un chat sachant que l'image n'en contient pas.