Étude de fonctions (2)

Exercice 1

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

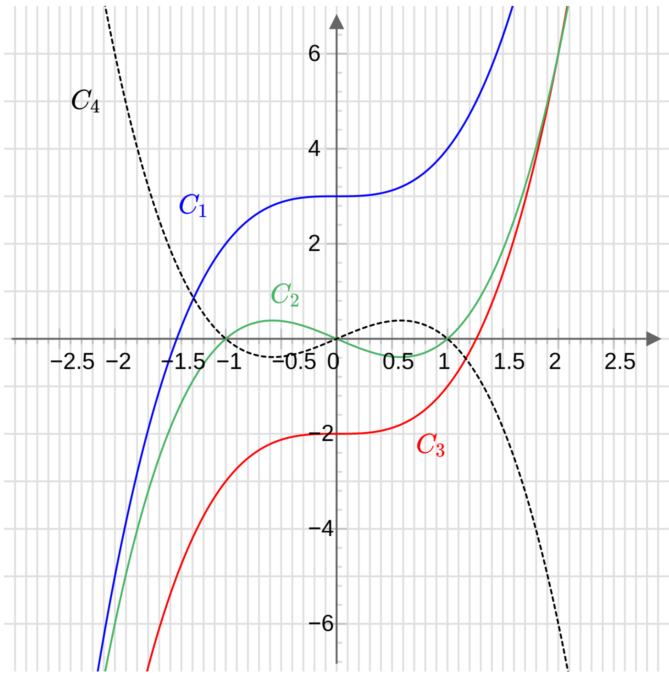
a. $x^3 = 27$
b. $-x^3 = 2$
c. $4t^3 = 50$
d. $x^5 - x^2 = 0$

Exercice 2

Soient P, Q R et S des polynômes de degré 3 définis pour tout réel x par :

$$P(x) = x^3 - 2 \ ; \ Q(x) = x^3 + 3 \ ; \ R(x) = x(x-1)(x+2) \ ; \ S(x) = -x(x-1)(x+2)$$

On a représenté les trois polynômes dans le repère ci-dessous.



1. Identifier, en justifiant, la courbe associée à chaque polynôme.
2. Dresser les tableaux de signes de chaque polynôme P, Q, R et S.

Exercice 3

Soit f le polynôme de degré 3 défini pour tout réel x par :

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 8.$$

1. Trouver parmi les nombres suivants ceux qui sont des racines de f : 0 ; 1 ; -1 ; 2 ; -2 ; -4.
2. En déduire la forme factorisée de f puis son tableau de signes.

Exercice 4

Dresser les tableaux de signes des polynômes ci-dessous :

a. $f(x) = -2(x+1)(x-5)(x-3)$.
b. $g(x) = -(x+3)(x-5)$.
c. $h(x) = 5(x-2)(x-7)(x+9)$.

Exercice 5

Une usine produit des téléviseurs qui sont vendus $1\,500$ € l'unité.
On estime que, pour une production journalière de x téléviseurs comprise entre 0 et 120, le coût, en €, s'élève à :
$c(x) = 25x^2 - 0,1x^3$.
On note $r(x)$ et $b(x)$ la recette et le bénéfice associés à une production de x téléviseurs.

1. Justifier que $r(x) = 1\,500x$.
2. Montrer que $b(x) = 0,1x^3 - 25x^2 + 1\,500x$.
3. Démontrer que : $b(x) = 0,1x(x-100)(x-150)$.
4. Dresser le tableau de signes de $b(x)$ et interpréter le résultat.
5. On admet que la fonction b ne change de sens de variations qu'une seule fois sur l'intervalle $[0\,;\,120]$.
   Compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'il permette d'afficher la production associée à un bénéfice maximal.

```python
def b(x):
    return ...
max = b(0)
x = 1
while b(x) > max:
    max = b(x)
    x = x+1
print(...)
```

Exercice 6

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = -2x + 7$.

a. Déterminer le taux de variation de f entre 4 et 5.
b. Soient a et b deux nombres réels tels $a < b$. Justifier que le taux de variations de f entre a et b est constant.
c. Cette fonction f est-elle la seule à avoir cette propriété d'un taux de variation constant ?

Exercice 7

Soit h la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{1}{x}$.

1. Calculer, sous la forme d'une fraction irréductile, le taux de variation de h entre 3 et 5.
2. Soient a et b deux nombres réels strictement positifs tels que $a < b$.
   a. Démontrer que le taux de variation de h entre a et b est à égale à $-\dfrac{1}{ab}$.
   b. En déduire le sens de variation de h sur $]0\,;\,+\infty[$.