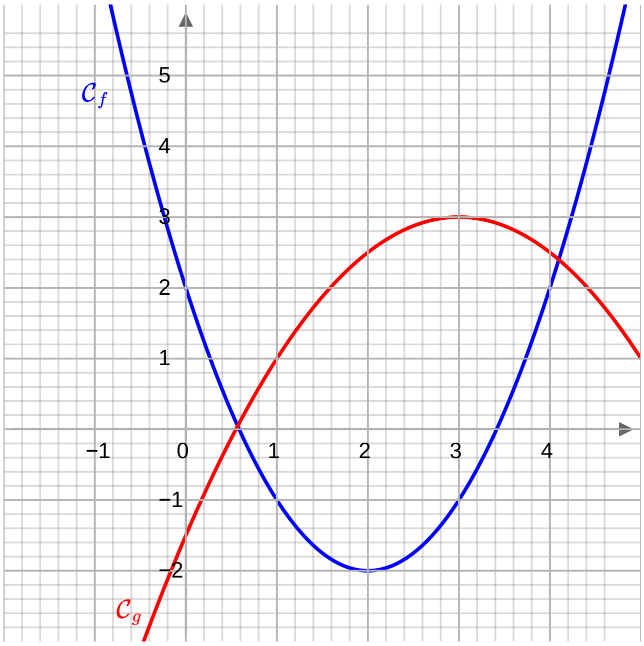
Étude de fonctions (1)

Exercice 1

Soient f et g deux fonctions dont les représentations graphiques respectives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont données ci-dessous.

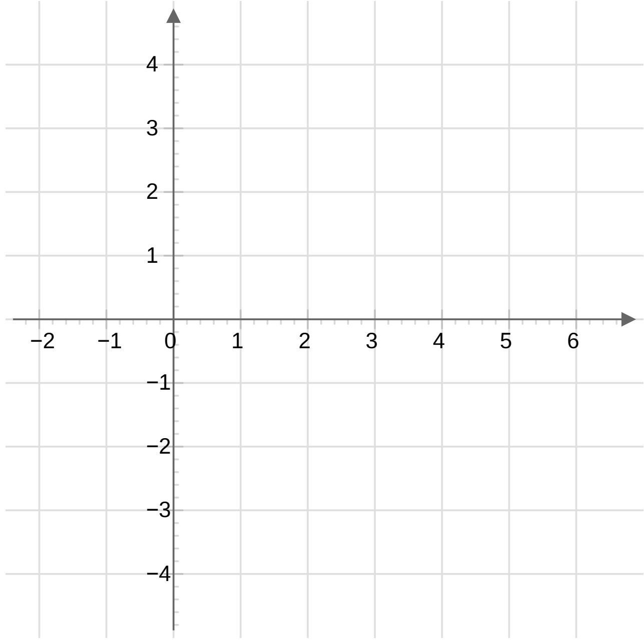


1. Lire graphiquement :
   a. L'image de 1 par f.
   b. Les antécédents de 4 par g.
   c. $f(3)$
   d. $g(3)$
2. À l'aide du graphique, établir :
   a. Le tableau de signes de f sur $[0\,;3]$.
   b. Le tableau de signe de g sur $[0\,;4]$.
3. Résoudre graphiquement les équations et inéquations suivantes :
   a. $f(x)=1$.
   b. $f(x)=g(x)$.
   c. $f(x)\leq 0$.
   d. $g(x)>f(x)$.

Exercice 2

Soit f la fonction affine définie pour tout réel x par $f(x)=\dfrac{1}{3}x-4$.
Soit g la fonction affine dont la représentation graphique dans un repère du plan passe par les points $A(0\,;2)$ et $B(4\,;-2)$.

1. Déterminer l'image de -6 par f.
2. Calculer $f(2)$. Le résultat sera donné sous la forme d'une fraction irréductible.
3. Dresser le tableau de signes de f.
4. Déterminer l'expression algébrique de la fonction affine g.
5. Construire dans le repère ci-dessous les représentations graphiques des fonctions f et g.



6. Déterminer les coordonnées exactes du point d'intersection entre les courbes représentatives des fonctions f et g.
7. En déduire les positions relatives entre les courbes représentatives des fonctions f et g.

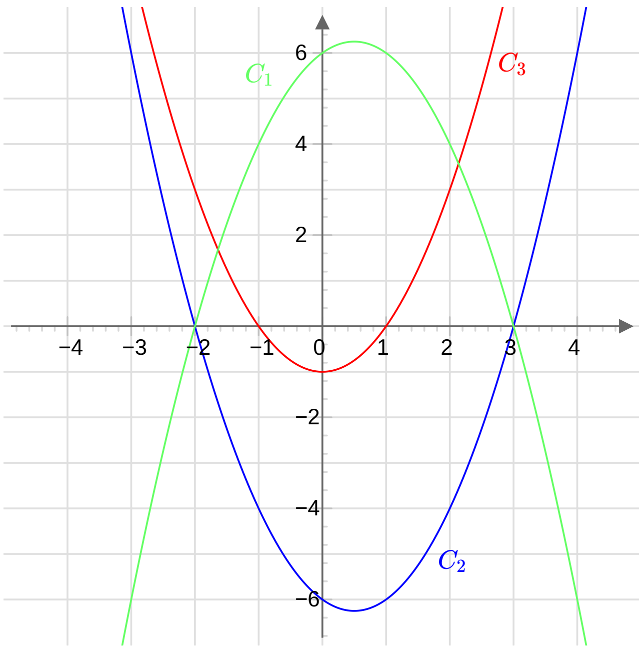
Exercice 3

Résoudre les équations suivantes :

a. $3(x-3)(2x+1)=0$
b. $x^2=2$
c. $x^2=-2$
d. $x^3=-2$
e. $x^4-3x=0$
f. $8x^2=x$

Exercice 4

Soient P, Q et R les polynômes définis pour tous réels x par :
$P(x)=(x-1)(x+1)$; $Q(x)=(x+2)(x-3)$; $R(x)=-(x+2)(x-3)$.
On a représenté les trois polynômes dans le repère ci-dessous.



1. Identifier, en justifiant, la courbe associée à chaque polynôme.
2. Dresser les tableaux de signes de chaque polynôme P, Q et R.

Exercice 5

Soit f la fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3x^2 - 18x + 48.$$

a. Parmi les nombres -8 ; 0 ; 2 et 8, lesquels sont des racines de f ?
b. Factoriser $f(x)$ et dresser son tableau de signes.

Exercice 6

Soit p la fonction définie pour tout réel x par $p(x) = 3x^2 - x - 4$.
On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

a. La courbe $\mathcal{C}$ possède-t-elle un axe de symétrie ? Si oui, donner son équation.
b. Dresser le tableau de variation de p.
c. Montrer que pour tout réel x : $p(x) = (3x - 4)(x + 1)$.
d. En déduire le signe de p sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7

Soit g la fonction définie pour tout réel t par $g(t) = -10t^2 - 52t - 10$.
On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

a. La courbe $\mathcal{C}$ possède-t-elle un axe de symétrie ? Si oui, donner son équation.
b. Dresser le tableau de variation de g.
c. Montrer que pour tout réel t : $g(t) = -2(t + 5)(5t + 1)$.
d. En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8

On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = -4x^2 + 24x - 21$.

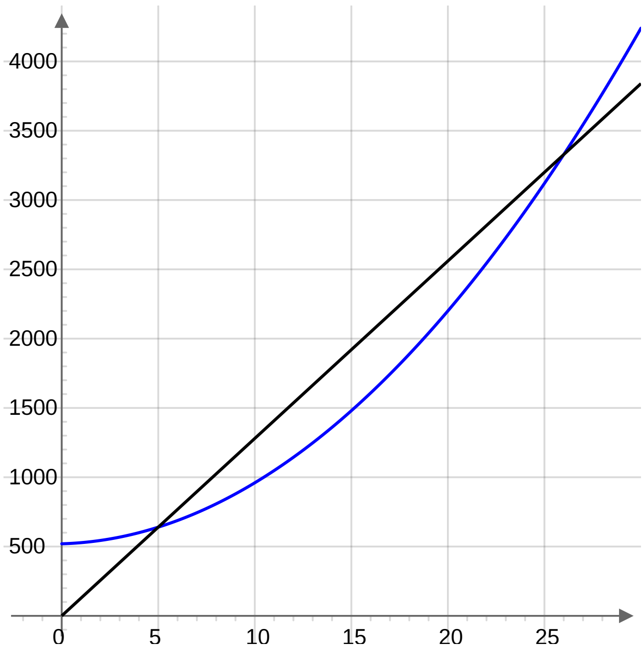
1. Calculer l'image de 0 et de 3 par la fonction f.
2. Montrer que, pour tout réel x, on a : $f(x) = (-2x + 11)(2x - 1)$.
3. En déduire les antécédents de 0 par la fonction f.
4. Montrer que pour tout réel x, on a : $f(x) = 25 - 4(x - 3)^2$.
5. Est-il possible de trouver un réel x, tel que $f(x) > 25$? Justifier.
6. Réaliser un schéma donnant l'allure la courbe de la fonction f sur lequel apparaîtront les résultats des questions **1., 3. et 5.**

Exercice 9

Une entreprise commercialise des chocolats. La production hebdomadaire maximale est de $30\,000$ chocolats. On suppose que la totalité de la production hebdomadaire est vendue chaque semaine.
Les charges de production, en euro, pour x milliers de chocolats vendus sont modélisées par la fonction C définie sur l'intervalle $[0; 30]$ par

$$C(x) = 4x^2 + 4x + 520.$$

L'entreprise fixe le prix de vente d'un chocolat à $0,128$ euros.
Pour la vente de x milliers de chocolats, on note $R(x)$ le chiffre d'affaires en euro.
$\mathcal{C}_R$ et $\mathcal{C}_C$ désignent les courbes représentatives de R et C dans le repère ci-dessous :



Le résultat réalisé pour x milliers de chocolats vendus est donné par la fonction B, définie pour tout nombre x appartenant à l'intervalle [0;30] par : $B(x) = R(x) - C(x)$. la réponse au problème.

1. Calculer $C(1)$. Que représente cette valeur dans le contexte de l'exercice ?
2. Calculer $R(1)$ et en déduire $B(1)$. Interpréter le résultat?
3. Expliquer pourquoi, pour x milliers de chocolats vendus on a $R(x) = 128x$.
4. Montrer que $B(x) = -4x^2 + 124x - 520$.
5. Montrer que $B(x) = -4(x-5)(x-26)$.
6. En déduire le tableau de signes de $B(x)$ sur $[0\ ;\ 30]$.
7. À l'aide des questions précédentes déterminer les quantités de chocolats à produire permettant d'obtenir un résultat positif.
8. Quelle est la quantité de chocolats à produire pour maximiser le résultat hebdomadaire ?
   On précisera la valeur de ce résultat maximal en euro.