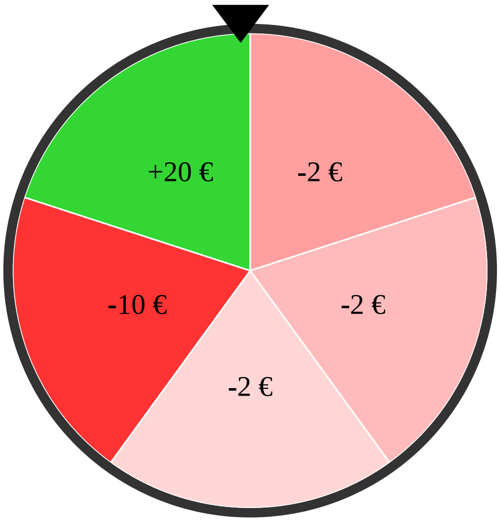
Variables aléatoires

1 Introduction

Dans la roue ci-dessous, tous les secteurs ont exactement la même forme. Nous sommes donc en présence d'une situation .



Lancers	
Gain total	
Gain moyen	

Fréquences des gains

Gain	-10 €	-2 €	+20 €
Fréquence			

En lançant un grand nombre de fois la roue, de quelles valeurs semblent se rapprocher les fréquences du dernier tableau ?

Correction

Les fréquences semblent se rapprocher des probabilités associées à chaque gain.

En effet la probabilité de gagner 20 € est :

Celle de perdre 2 € :

Celle de perdre 10 € :

Remarque 1

Dans cette situation on peut dire que le gain est une : **aléatoire** car on ne sait pas quelle valeur il prendra avant l'expérience, et **finie** car il ne peut prendre que trois valeurs distinctes.

2 Variables aléatoires

Définition 1

Soit Ω un associé à une expérience aléatoire.
Une X est une définie sur et à valeurs dans
X est discrète et finie si elle prend un nombre de valeurs $x_1, x_2, ..., x_n$.

Exemple 1

Dans l'exemple de l'introduction on peut définir une G représentant le d'un joueur après une partie.

Définition 2

La d'une variable aléatoire discrète finie X est la fonction qui à chaque valeur prise par X associe le nombre

On peut résumer cela dans un tableau :

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$P(X = x_i)$				

Exemple 2

La loi de probabilité de la variable aléatoire G associé au gain dans l'expérience de la roue précédente est :

G	-10	-2	20
$P(X = x_i)$			

Définition 3

Soit X une variable aléatoire prenant n valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$.

de X, notée est la arithmétique des valeurs x_i pondérées par leur

On a :

Remarque 2

On peut noter de manière raccourcie : $\mathrm{E}(X) =$

Exemple 3

Toujours dans l'expérience de la roue précédente, on trouve, en lisant le tableau représentant la loi de probabilité de G :

$\mathrm{E}(G) =$

On remarque que ce résultat est proche du du simulateur et ça confirme qu'il est de jouer à ce jeu ar en par partie, on $0,80$ €.

Définition 4

L'évènement est la de tous les évènements élémentaires avec

Exemple 4

Dans l'exemple de la roue $\{X \leq 0\} =$

Remarque 3

On définit de manière analogue les évènements

Définition 5

Une épreuve de de paramètre avec est une expérience qui n'a que issues possibles, l'une appelée « », qui a pour probabilité et l'autre appelée « », qui a pour probabilité

Exemple 5

On possède une pièce de monnaie truquée telle que la probabilité d'obtenir pile est de $0,8$.

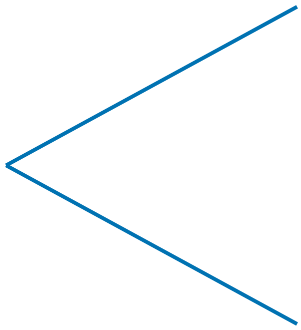
Propriété 1

Soit X une variable aléatoire associée à une épreuve de Bernoulli de paramètre $p \in [0\,;\,1]$ qui vaut 0 en cas d'échec et 1 en cas de succès.
La loi de probabilité de X est donnée par le tableau ci-dessous :

L'espérance de X vaut :

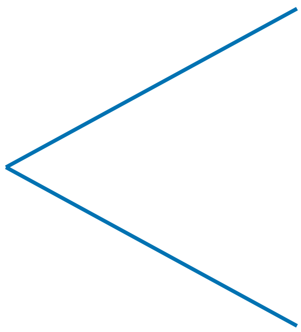
Remarque 4

On peut illustrer la variable aléatoire de la propriété précédente à l'aide d'un arbre de pondéré :



Exemple 6

Pour la pièce de monnaie truquée déjà évoquée on a :



On peut alors calculer : $\mathrm{E}(X) =$

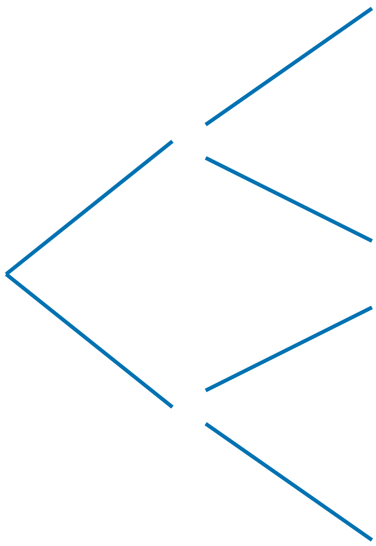
3 Répétition d'épreuves aléatoires

3.1 Généralités

On réalise plusieurs épreuves aléatoires les unes à la suite des autres.
L'arbre de probabilité associé à cette d'épreuves est constitué d'une première série de correspondant à la première épreuves, puis d'une deuxième série correpondant à la deuxième épreuve etc.
On indique sur chacune des branches la de l'issue correspondante.

Exemple 7

Si on lance deux fois la pièce de monnaie truquée précédente on a l'arbre ci-dessous :



Propriété 2

- Dans une succession d'épreuves aléatoires, on dit que deux épreuves sont si les probabilités de la deuxième épreuve sont quelle que soit l'issue de la épreuve.
- On appelle une suite de associée à une succession d'issues.

Exemple 8

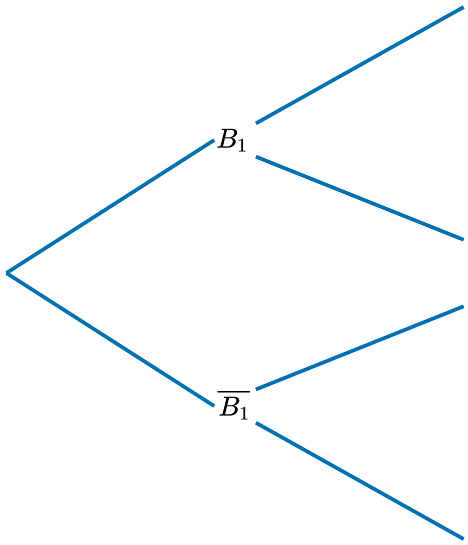
Dans l'arbre précédent nous sommes dans unes situation car les probabilités des deuxièmes branches ne pas de la première série de branches.

On dénombre quatre chemins : ; ; et

Exemple 9

Une urne contient 5 boules indiscernables au toucher : 3 blanches et 2 rouges.
On effectue un premier tirage. On note la couleur de la boule obtenue, on ne remet pas la boule dans l'urne et on effectue un deuxième tirage. On note à nouveau la couleur de la deuxième boule tirée.
On note B_1 l'évènement : « la boule tirée est blanche »,

et : B_2 l'évènement : « la deuxième boule tirée est blanche »,
L'arbre de probabilité associée à cette situation est :



Les épreuves ne sont pas car la probabilité d'obtenir une boule blanche ou rouge au deuxième tirage en fonction du tirage.

Propriété 3

La probabilité d'un chemin est égale au des probabilités indiquées sur les qui le constituent.

Exemple 10

$P(B_1 \cap B_2) =$

$P(B_1 \cap \overline{B_2}) =$

$P(\overline{B_1} \cap B_2) =$

$P(\overline{B_1} \cap \overline{B_2}) =$

On remarque que $P(B_1 \cap B_2) + P(B_1 \cap \overline{B_2}) + P(\overline{B_1} \cap B_2) + P(\overline{B_1} \cap \overline{B_2}) =$

3.2 Schéma de Bernoulli

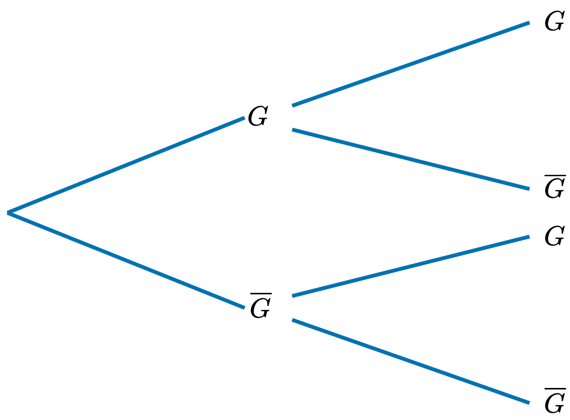
Définition 6

Un de paramètres et est la répétition de n épreuves de et de paramètre

Exemple 11

On lance un dé équilibré et on note G l'évènement « obtenir la face 6 ».

L'arbre ci-dessous illustre le schéma de de paramètres associé à lancers successifs de ce dé.



En notant X la variable aléatoire qui compte le nombre de faces 6 obtenu après les deux lancers, on obtient les résultats suivants :

- Un seul chemin permet d'obtenir deux faces 6, ainsi : $P(X=2)=$
- Deux chemins permettent d'obtenir une seule face 6 : obtenir la face 6 au premier et pas au second ou obtenir la face 6 au deuxième lancer mais pas au premier.

  Ainsi : $P(X=1)=$
- Un seul chemin ne donne aucune face 6, et donc : $P(X=0)=$

La loi de probabilité de X est alors :

k	0	1	2
$P(X=k)$			

On vérifie bien que la somme des probabilités est égale à

On peut déterminer également l'espérance de X :

Exemple 12

Lorsqu'on lance 100 fois la pièce de monnaie truquée précédente et que l'on s'intéresse au nombre de obtenu, on est en présence d'un schéma de de paramètres

L'algorithme Python ci-dessous permet de compter le nombre de piles que l'on obtient lorsqu'on lance 100 fois cette pièce truquée.

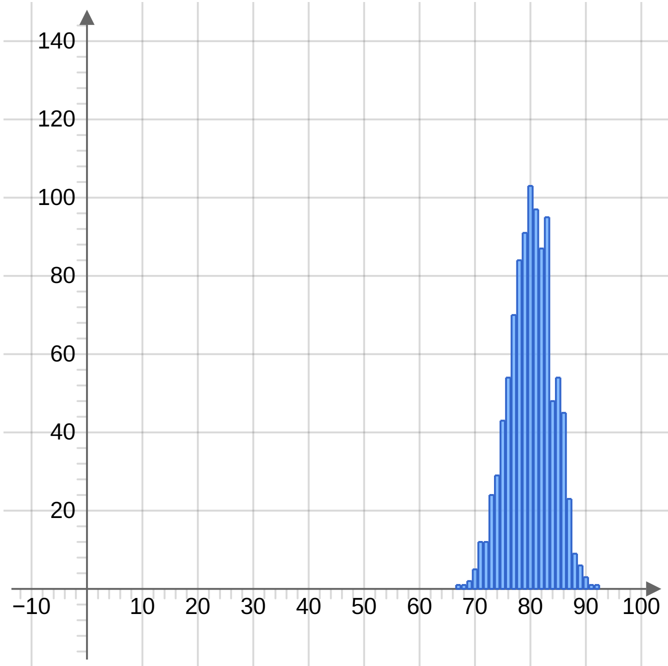
```python
from random import*
nb_piles = 0

for i in range(0,100):
    m = random()
    if m < 0.8:
        nb_piles = nb_piles +1

print(nb_piles)
```

On remarque que les résultats semblent autour de

Le graphique ci-dessous est une simulation de $1{,}000$ de répétitions de l'algorithme précédent. En abscisse on a le nombre de piles obtenus sur 100 lancers de pièces et en ordonnées on note combien de fois on a obtenu ce résultat sur les $1\ 000$ répétitions de l'expérience.



On remarque que les résultats les plus sont situés autour de