Dérivation

1 Introduction

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = x^2$.

1. Quel est le taux de variation de f entre 3 et 5 ?

   Correction

   Ce taux vaut :

2. Déterminer le taux de variation de f entre 3 et $3,1$?

   Correction

3. Montrer que le taux de variation de f entre 3 et x est égale à $x + 3$.

   Correction

   On remarque que si on remplace x par ou ou obtient les résultats aux questions précédentes.
   Par exemple, si on remplace x par $3,01$ on trouve que le taux vaut et si on remplace x par $2,999$, le taux vaut

   Ainsi, si x est proche de 3, le taux de variation entre 3 et x est proche de

4. Pour tout réel a, montrer que le taux de variation de f entre a et x est égale à $x + a$.

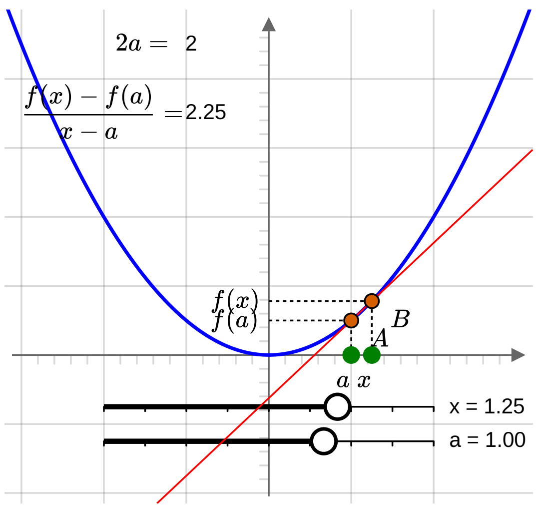
   Correction

   On remarque ici que si x est proche de a, alors le taux de variation entre x et a est proche de

   On peut écrire dans cette situation :

Remarque 1

Dans le repère ci-dessous, lorsque x se rapproche de a, la sécante (AB) se rapproche d'une dont le coefficient directeur



2 Définitions

Définition 1

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et a et x deux nombres de I.

Si lorsque x vers a, avec $x \neq a$, le taux de $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ tend vers un nombre, ce dernier s'appelle de f en a et se note

On dit que f est en $x = a$ et on écrit :

Exemple 1

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 3x + 1$.
Pour tous réels a et x, avec $x \neq a$, on a :

$$\frac{g(x)-g(a)}{x-a} =$$

Ainsi,

Définition 2

Une fonction f est dite sur un intervalle I, si elle est en tout a de I.
On définit alors sur I la fonction de f, noté qui à tout $x \in I$ associe le nombre

Exemple 2

Pour f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$, on a $f'(x) =$
Pour g la fonction définie $\mathbb{R}$ par $g(x) = 3x + 1$, on a $g'(x) =$

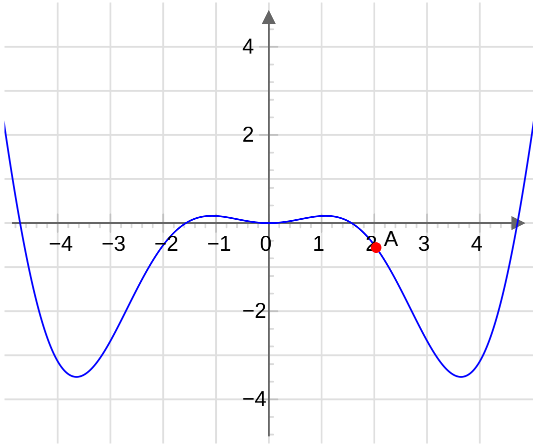
3 Propriétés

Propriété 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et dérivable en $a \in I$.
Le nombre est le de la T à la courbe représentative de $\mathcal{C}_f$ de la fonction f au point d'abscisse
L'équation réduite de T est :

Exemple 3

Dans le graphique ci-dessous, en déplaçant le point A on peut observer les diverses tangentes à la courbe tracée.



Exemple 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
On a $f'(x) =$ donc l'équation réduite de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d"abscisse 5 est :

Propriété 2

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si pour tout $x \in I$, alors f est sur I.
- Si pour tout $x \in I$, alors f est sur I.
- Si pour tout $x \in I$, alors f est sur I.

Exemple 5

Pour la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$, on a $f'(x) =$

Donc si $x \leq 0$, alors et f est

Si $x \geq 0$, alors et f est

Tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$

On remarque que f présente un en $x = 0$ qui est égale à

Propriété 3

Soient a, b, c et d des nombres réels. On les formules de dérivation suivantes :

$f(x)$	$f'(x)$
a	0
x	1
ax	a
$ax+b$	a

$f(x)$	$f'(x)$
x^2	$2x$
ax^2	$2ax$
ax^2+bx+c	$2ax$
x^3	$3x^2$
ax^3+bx^2+cx+d	$3ax^2+2bx+c$

Exercice 1

Déterminer l'expression des dérivées des fonctions f, g, h et i définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = -15x + 4$; $g(x) = 4x^2$; $h(x) = x^3 + 13$; $i(x) = 5x^3 - x^2 + 13x - 4$

Correction

On applique les formules du tableau précédent.

Pour $f(x) = -15x + 4$, on a $f'(x) =$

Pour $g(x) = 4x^2$, on a $g'(x) =$

Pour $h(x) = x^3 + 13$, on a $h'(x) =$

Pour $i(x) = 5x^3 - x^2 + 13x - 4$, on a : $i'(x) =$

Propriété 4

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Pour tout nombre réel k on a :

Exemple 6

Soit a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $a(x) = 10\left(6x - x^2\right)$.
La propriété précédente nous dit que pour obtenir $a'(x)$ on peut tout d'abord dériver puis multiplier le résultat par

$a'(x) =$

On aurait bien sûr pu distribuer le 10 dans $a(x)$ puis dériver l'expression obtenue, mais cette propriété permet souvent d'effectuer des calculs moins complexes.