Étude de fonctions (1)

1 Généralités

Définition 1

Soit f une fonction définie sur un ensemble D de $\mathbb{R}$.
Dans un repère du plan, de la fonction f, est l'ensemble des points de coordonnées tels que

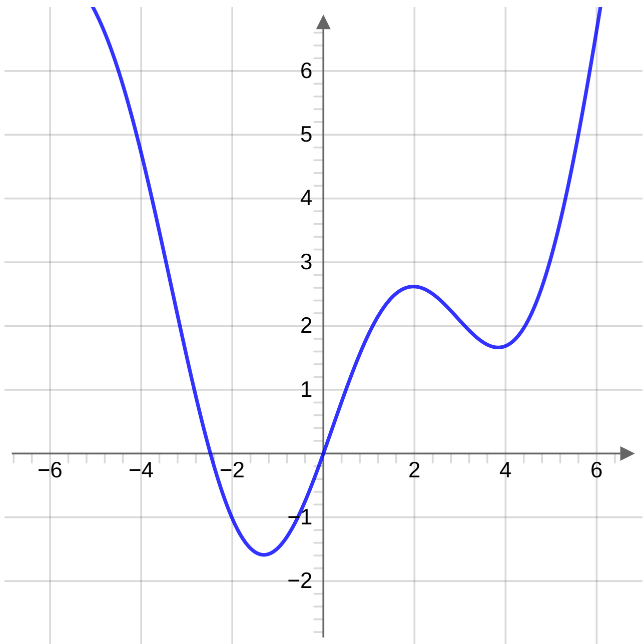
On retiendra les relations :

$\leftrightarrows$ $\leftrightarrows$

$\leftrightarrows$ $\leftrightarrows$

Exemple 1

On considère la représentation graphique d'une fonction f dans un repère du plan ci-dessous.



On observe que

- $f(2) \approx$
- le nombre 4 possède antécédents : et
- Sur l'intervalle $[-4\,;\,-2]$ la fonction f est
- Sur l'intervalle $[-2\,;\,0]$ la fonction f est
- L'équation $f(x) = 1$ admet solutions :
- L'équation $f(x) = -1,9$
- L'inéquation $f(x) \leq 0$ admet pour solution

Propriété 1

Soient f et g deux fonctions définies sur un ensemble D de $\mathbb{R}$.
Pour déterminer les éventuels entre les courbes représentatives de ces deux fonctions, on résout l'équation :

Pour toute solution x_0, le point d'intersection associée a alors pour coordonnées

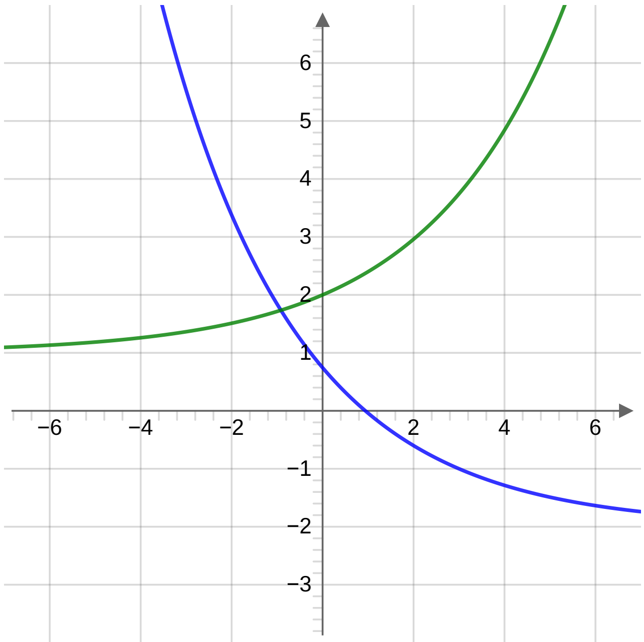
Remarque 1

Réciproquement, résoudre graphiquement l'équation revient à chercher l'abscisse des points entre les courbes des deux fonctions.

Propriété 2

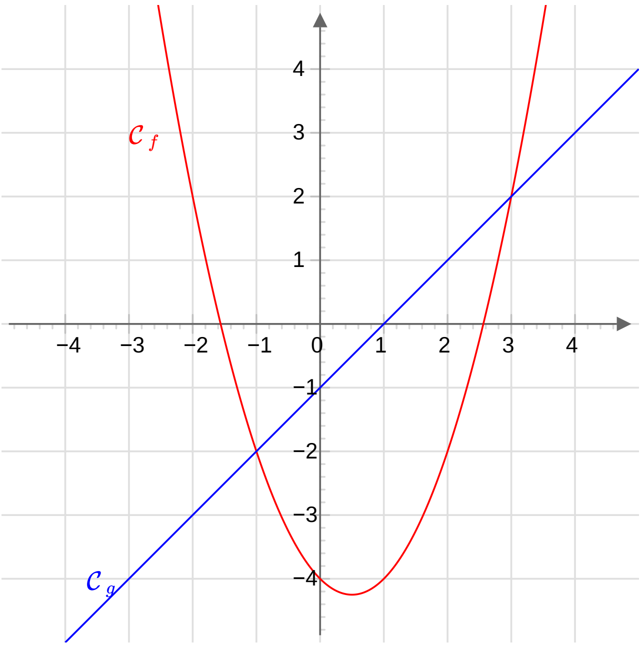
Soient f et g deux fonctions définies sur un ensemble D de $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ leur courbe représentative respective.
Pour déterminer la des courbes représentatives de ces deux fonctions, on résout l'inéquation :

- Les solutions nous donnent les abscisses des points où $\mathcal{C}_g$ est de $\mathcal{C}_f$.
- Les nombres qui ne sont pas solutions nous donnent les abscisses des points où $\mathcal{C}_f$ est de $\mathcal{C}_g$.



Exercice 1

Dans la figure ci-dessous, les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ presentent respectivement des fonctions f et g.



L'ensemble des solution de l'inéquation $f(x) \leq g(x)$ sur l'intervalle $[-3\,;\,4]$ est :

☐ $[-1\,;\,3]$ ☐ $[3\,;\,+\infty[$

☐ $[-3\,;\,-1] \cup [3\,;4]$ ☐ $[-2\,;\,2]$

☐ $[-3\,;\,-1] \cap [3\,;4]$ ☐ $]-2\,;\,2[$

Correction

On cherche ici les x (donc les) qui font que sur le graphique les $f(x)$ correspondants sont que les $g(x)$.
Cette situation se produit lorsque la courbe rouge de la fonction f est de celle bleue de la fonction g, c'est-à-dire pour les x compris entre soit sur

2 Rappels sur les fonctions affines

Définition 2

Une fonction f définie sur est dite lorsqu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout

Les nombres a et b sont respectivement appelés

Exemple 2

La fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = 7 - 11x$ est une fonction Son ordonnée à l'origine vaut et son coefficient directeur

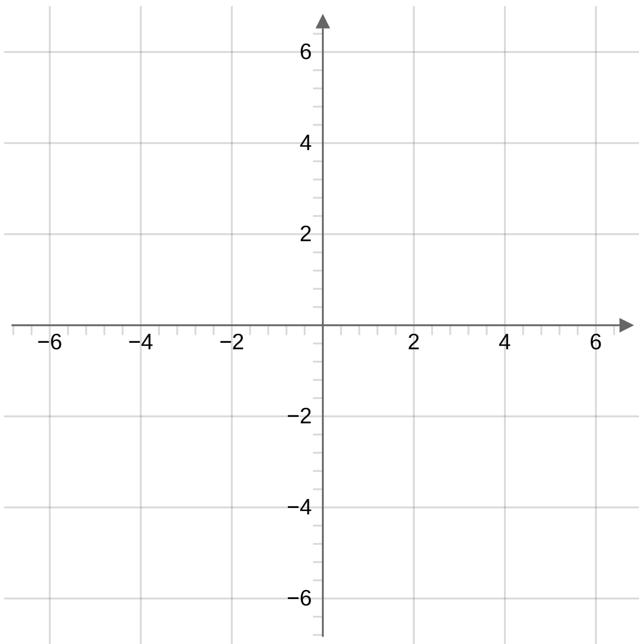
Propriété 3

Dans un repère orthonormé du plan, la courbe représentative d'une fonction affine est

Exercice 2

Dans le repère ci-dessous, construire les courbes représentatives des deux fonctions affines f et g définies pour tout réel x par :

$f(x) = \frac{1}{2}x - 3$ $\qquad$ $g(x) = -x + 1$



Correction

Pour la fonction f :

On a Donc la droite passe par le point

De plus, Donc la droite passe également par le point

Pour la fonction g :

On a Donc la droite passe par le point

De plus, Donc la droite passe également par le point

Propriété 4

Soient a et b deux réels, et soit f la fonction affine définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

- Si alors :

- Si alors :

Exercice 3

Soit h la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $h(t) = 3t - 5$. Déterminer le tableau de signe de h sur $\mathbb{R}$.

Correction

Résolvons tout d'abord

Ainsi, puisque le coefficient directeur de g vaut qui est un nombre nous avons le tableau de signes suivant :

Propriété 5

Soit f une fonction affine dont on note a le coefficient directeur.
Pour tout nombre réel distincts et on a alors :

Exercice 4

Soit f la fonction affine dont la droite représentative passe par les points $A(-2; 3)$ et $B(4; -1)$.
Déterminer l'expression algébrique de f.

Correction

Notons a et b le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de f. On a alors :

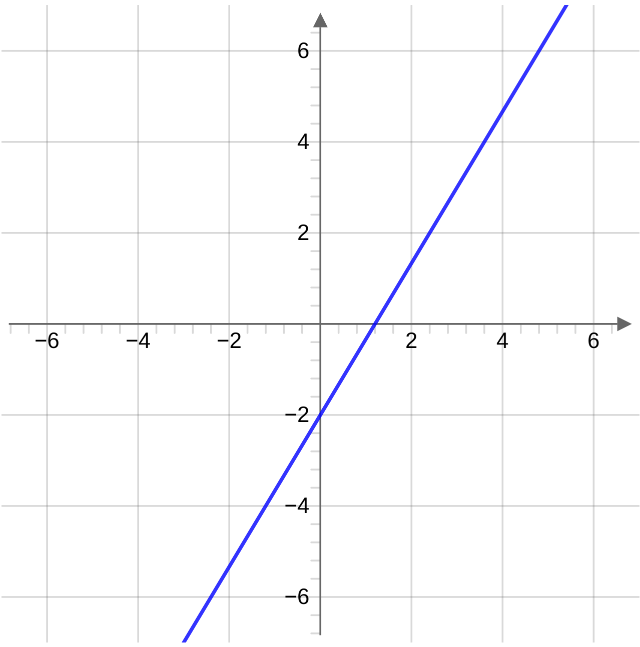
Nous avons ainsi que pour tout réel x,

Pour déterminer b, il nous suffit alors de remplacer par les coordonnées respectives de

L'expression algébrique de f est donc, pour tout réel x,

Exercice 5

Dans le repère ci-dessous a été tracée une droite représentant une fonction affine g.
Déterminer l'expression algébrique de g.



Correction

Nous voyons que la droite passe par le point de coordonnées ainsi l'ordonnée à l'origine vaut

La droite passe également par le point le coefficient directeur vaut donc :

L'expression algébrique de g est donc pour tout réel x :

3 Fonctions polynômes de degré 2

Définition 3

Soient a, b et c trois nombres réels avec $a \neq 0$.
La fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) =$ est un

Un nombre réel x_0 est une de f si et seulement si

Exemple 3

Pour le polynôme $g(x) = -2x^2 + 3x + 5$, on a $a =$ $b =$ et $c =$

Les nombres -1 et $\frac{5}{2}$ sont des racines de g.

En effet :

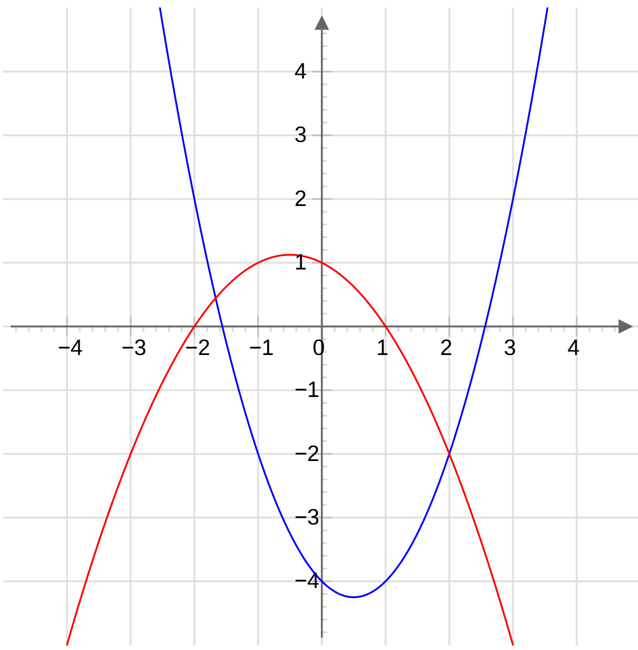
Et :

Propriété 6

Soit f une fonction polynôme de degré 2, telle que pour tout réel x : avec

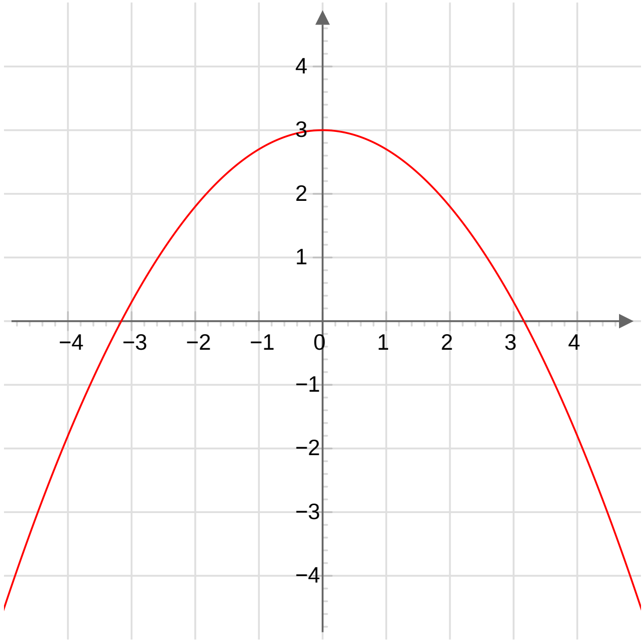
La courbe représentative de f dans un repère du plan est

- Si $a > 0$ la parabole pointe vers le
- Si $a < 0$ la parabole pointe vers le



Remarque 2

Si $b =$ c'est-à-dire si $f(x) =$ alors l'axe des ordonnées est un



Propriété 7

Soit f une fonction polynôme de degré 2, telle que pour tout réel x : avec

Si f possède deux et alors son expression algébrique est :
En considérant ona a :

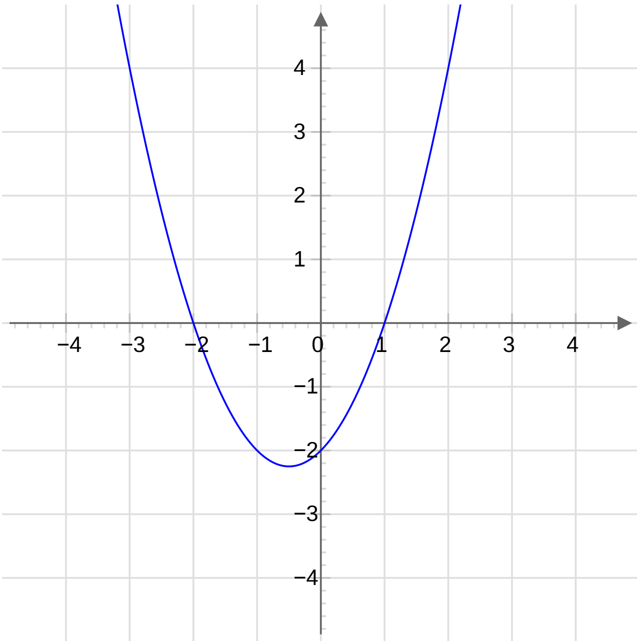
- Si le tableau de signes de f est :

- Si le tableau de signes de f est :

La parabole représentant f possède dans cette situation un axe de symétrique d'équation $x = d$ avec $d = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$

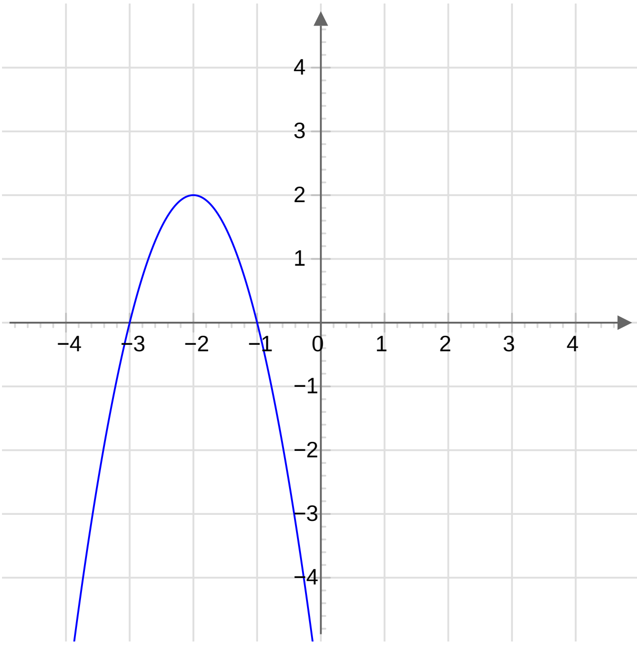
Exemple 4

La courbe représentative de $x \mapsto$ ci-dessous possède un axe de symétrie d'équation



Exemple 5

La courbe représentative de $x \mapsto$ ci-dessous possède un axe de symétrie d'équation



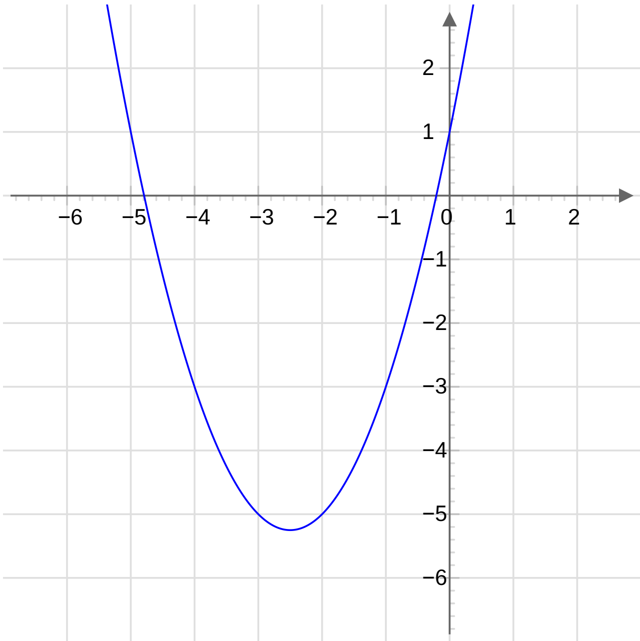
Propriété 8

Soit f une fonction polynôme de degré 2, telle que pour tout réel x : avec

La représentant f dans un repère du plan possède un axe de d'équation

Exercice 6

Soit p la fonction polynôme de degré 2 définie pour tout réel x par $p(x) = x^2 + 5x + 1$.
Déterminer l'équation de l'axe de symétrie Δ de la parabole représentant p dans le repère ci-dessous, puis construire Δ.



Correction

Pour ce polynôme $p(x) = x^2 + 5x + 1$ on pose : et

On a

L'équation de Δ est donc