Terminale ~ Spécialité mathématique
Livret de révision

1 Suites numériques

Exercice 1 ★

On s'intéresse au développement d'une bactérie.
Dans cet exercice, on modélise son développement avec les hypothèses suivantes : cette bactérie a une probabilité $0,3$ de mourir sans descendance et une probabilité $0,7$ de se diviser en deux bactéries filles.
Dans le cadre de cette expérience, on admet que les lois de reproduction des bactéries sont les mêmes pour toutes les générations de bactéries qu'elles soient mère ou fille.
Pour tout entier naturel n, on appelle p_n la probabilité d'obtenir au plus n descendances pour une bactérie.
On admet que, d'après ce modèle, la suite (p_n) est définie de la façon suivante :
$p_0 = 0,3$ et, pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = 0,3 + 0,7p_n^2$.

1. La feuille de calcul ci-dessous donne des valeurs approchées de la suite (p_n)
   a. Déterminer les valeurs exactes de p_1 et p_2 (masquées dans la feuille de calcul) et interpréter ces valeurs dans le contexte de l'énoncé.
   b. Quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, d'obtenir au moins 11 générations de bactéries à partir d'une bactérie de ce type ?
   c. Formuler des conjectures sur les variations et la convergence de la suite (p_n).
2. a. Démontrer par récurrence sur n que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant p_n \leqslant p_{n+1} \leqslant 0,5$.
   b. Justifier que la suite (p_n) est convergente.
3. On appelle L la limite de la suite (p_n).
   a. Justifier que L est solution de l'équation $0,7x^2 - x + 0,3 = 0$.
   b. Déterminer alors la limite de la suite (p_n).
4. La fonction suivante, écrite en langage Python, a pour objectif de renvoyer les n premiers termes de la suite (p_n).
   Recopier, sur votre copie, cette fonction en complétant les lignes 2, 4 et 5 de façon à ce que la fonction *suite (n)* retourne, sous forme de liste, les n premiers termes de la suite.

```python
1 def suite(n):
2     p = ...
3     s = [p]
4     for i in range(...):
5         p = ...
6         s.append(p)
7     return s
```

	A	B
1	n	p_n
2	0	$0,3$
3	1	
4	2	
5	3	$0,407\,695\,62$
6	4	$0,416\,351$
7	5	$0,421\,343\,71$
8	6	$0,424\,271\,37$
9	7	$0,426\,004\,33$
10	8	$0,427\,035\,78$
11	9	$0,427\,651\,69$
12	10	$0,428\,020\,18$
13	11	$0,428\,240\,89$
14	12	$0,428\,373\,18$
15	13	$0,428\,452\,51$
16	14	$0,428\,500\,09$
17	15	$0,428\,528\,63$
18	16	$0,428\,545\,75$
19	17	$0,428\,556\,02$

Exercice 2 -- *Baccalauréat Amérique du Nord - 22 mai 2024* ★

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ par $g(x) = 2x - x^2$.

1. Montrer que la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ et préciser les valeurs de $g(0)$ et de $g(1)$.

On considère la suite (u_n) définie par $\left\{\begin{array}{lll} u_0 & = & \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} & = & g(u_n) \end{array}\right.$ pour tout entier naturel n.

2. Calculer u_1 et u_2.
3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $0 < u_n < u_{n+1} < 1$.
4. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
5. Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n).

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \ln(1 - u_n)$.

6. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2 et préciser son premier terme.
7. En déduire une expression de v_n en fonction de n.
8. En déduire une expression de u_n en fonction de n et retrouver la limite déterminée à la question 5.
9. Recopier et compléter le script Python ci-dessous afin que celui-ci renvoie le rang n à partir duquel la suite dépasse 0,95.

```python
def seuil():
    n = 0
    u = 0.5
    while u < 0.95:
        n =
        u =
    return n
```

Exercice 3 -- *Baccalauréat Centres étrangers - 5 juin 2024* ★

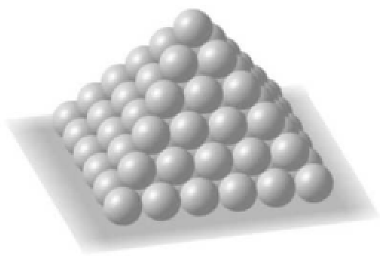
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ par $f(x) = 2x\mathrm{e}^{-x}$.
On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.

1. a. Résoudre sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ l'équation $f(x) = x$.
   b. Démontrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ 1]$, $f'(x) = 2(1-x)\mathrm{e}^{-x}$.
   c. Donner le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle [0~;~1]. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0,1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout n entier naturel, $0 \leqslant u_n < u_{n+1} \leqslant 1$.
   b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
3. Démontrer que la limite de la suite (u_n) est $\ln(2)$.
4. a. Justifier que pour tout entier naturel n, $\ln(2) - u_n$ est positif.
   b. On souhaite écrire un script Python qui renvoie une valeur approchée de $\ln(2)$ par défaut à 10^{-4} près, ainsi que le nombre d'étapes pour y parvenir. Recopier et compléter le script ci-dessous afin qu'il réponde au problème posé.
   c. Donner la valeur de la variable n renvoyée par la fonction seuil ().

```python
def seuil():
    n = 0
    u = 0.1
    while ln(2)-u ... 0.0001:
        n = n+1
        u = ...
    return (u, n)
```

Exercice 4 -- *Baccalauréat Polynésie 5 septembre 2024* **

On considère une pyramide à base carrée formée de boules identiques empilées les unes sur les autres:



- le 1er étage, situé au niveau le plus haut, est composé de 1 boule ;
- le 2e étage, niveau juste en dessous, est composé de 4 boules ;
- le 3e étage possède 9 boules ;
- ...
- le n-ième étage possède n^2 boules.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note u_n le nombre de boules qui composent le n-ième étage en partant du haut de la pyramide. Ainsi, $u_n = n^2$.

1. Calculer le nombre total de boules d'une pyramide à 4 étages.
2. On considère la suite (S_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.
   a. Calculer S_5 et interpréter ce résultat.
   b. On considère la fonction *pyramide* ci-dessous écrite de manière incomplète en langage Python.
   Recopier et compléter sur la copie le cadre ci-dessous de sorte que, pour tout entier naturel non nul n, l'instruction *pyramide(n)* renvoie le nombre de boules composant une pyramide de n étages.

```python
def pyramide(n):
    S = 0
    for i in range(1,n+1):
        S = ...
    return ...
```

   c. Vérifier que pour tout entier naturel n : $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \dfrac{(n+1)(n+2)[2(n+1)+1]}{6}$.
3. Un marchand souhaite disposer des oranges en pyramide à base carrée. Il possède 200 oranges. Combien d'oranges utilise-t-il pour construire la plus grande pyramide possible ?

Exercice 5 -- *Baccalauréat Amérique du Nord 21 mai 2024* ★★

Pour tout entier naturel n, on considère les intégrales suivantes : $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\sin(x)\,\mathrm{d}x$, $\quad J_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\cos(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer I_0.
2. a. Justifier que, pour tout entier naturel n , on a $I_n \geqslant 0$.
   b. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$.
   c. Déduire des deux questions précédentes que la suite (I_n) converge.
3. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $I_n \leqslant \displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$.
   a. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x = \frac{1-\mathrm{e}^{-n\pi}}{n}$.
   b. Déduire des deux questions précédentes la limite de la suite (I_n).

4. a. En intégrant par parties l'intégrale I_n de deux façons différentes, établir les deux relations suivantes, pour tout entier naturel $n \geqslant 1 : I_n = 1 + \mathrm{e}^{-n\pi} - nJ_n$ et $I_n = \dfrac{1}{n} J_n$

   b. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $I_n = \dfrac{1 + \mathrm{e}^{-n\pi}}{n^2 + 1}$.

5. On souhaite obtenir le rang n à partir duquel la suite (I_n) devient inférieure à 0,1.
   Recopier et compléter la cinquième ligne du script Python ci-dessous avec la commande appropriée.

```
1 from math import*
2 def seuil():
3     n = 0
4     I = 2
5     
6         n = n+1
7         I = (1+exp(-n*pi))/(n*n+1)
8     return n
```

2 Fonctions

Exercice 6 -- *Centres étrangers - 6 juin 2024* ★

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 1[$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x-1}$.
On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 1[$. On appelle $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

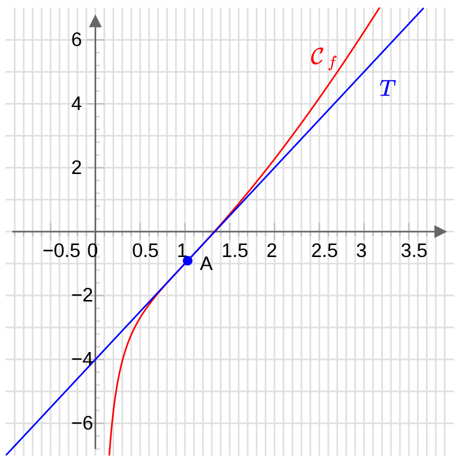
1. a. Déterminer la limite de la fonction f en 1.
   b. En déduire une interprétation graphique.
2. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
3. 1. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty\ ;\ 1[$, on a $f'(x) = \dfrac{(x-2)\mathrm{e}^x}{(x-1)^2}$.
   2. Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 1[$.
4. On admet que pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty\ ;\ 1[$, on a $f''(x) = \dfrac{\left(x^2 - 4x + 5\right)\mathrm{e}^x}{(x-1)^3}$.
   a. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 1[$.
   b. Déterminer l'équation réduite de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
   c. En déduire que, pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty\ ;\ 1[$, on a : $\mathrm{e}^x \geqslant (-2x-1)(x-1)$.
5. a. Justifier que l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 1[$.
   b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Exercice 7 -- *Baccalauréat Amérique du Nord 21 mai 2024* ★★

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = x\ln\left(x^2\right) - \dfrac{1}{x}$.

Partie A : lectures graphiques

On a tracé ci-dessous la courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ de la fonction f, ainsi que la droite (T), tangente à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point A de coordonnées $(1\ ;\ -1)$.
Cette tangente passe également par le point $B(0\ ;\ -4)$.



1. Lire graphiquement $f'(1)$ et donner l'équation réduite de la tangente (T).
2. Donner les intervalles sur lesquels la fonction f semble convexe ou concave.
   Que semble représenter le point A pour la courbe $(\mathcal{C}_f)$?

Partie B : étude analytique

1. Déterminer, en justifiant, la limite de f en $+\infty$, puis sa limite en 0.
2. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   a. Déterminer $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   b. Montrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, $f''(x) = \dfrac{2(x+1)(x-1)}{x^3}$.

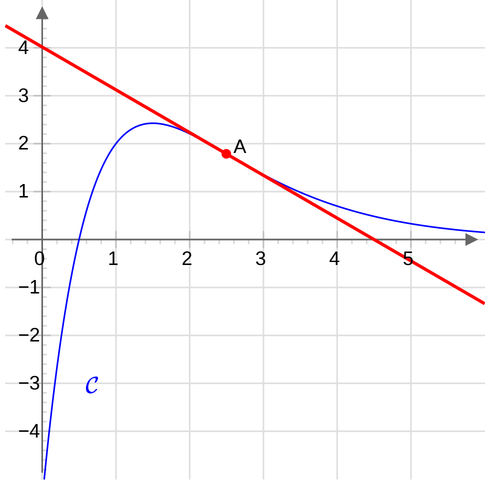
3. a. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   b. Étudier les variations de la fonction f', puis le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
4. a. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   b. Donner la valeur arrondie au centième de α et montrer que α vérifie : $\alpha^2 = \exp\left(\dfrac{1}{\alpha^2}\right)$.

Exercice 8 -- *Baccalauréat Asie 10 juin 2024* ★★

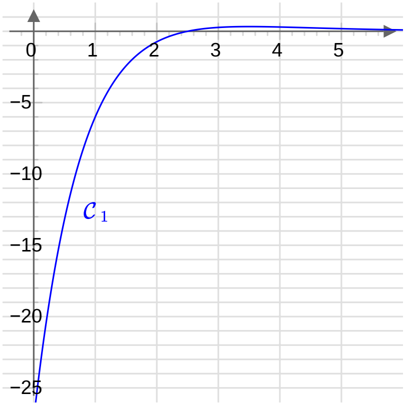
Partie A

On considère une fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$, représentée par la courbe $\mathcal{C}$ ci-dessous.

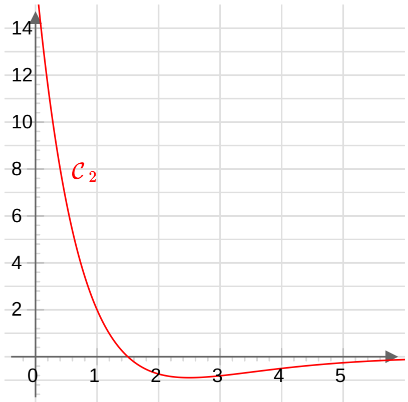
La droite T est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse $\dfrac{5}{2}$.



1. Dresser, par lecture graphique, le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ 5]$.
2. Que semble présenter la courbe $\mathcal{C}$ au point A ?
3. La dérivée f' et la dérivée seconde f'' de la fonction f sont représentées par les courbes ci-dessous.
Associer à chacune de ces deux fonctions la courbe qui la représente.
Ce choix sera justifié.

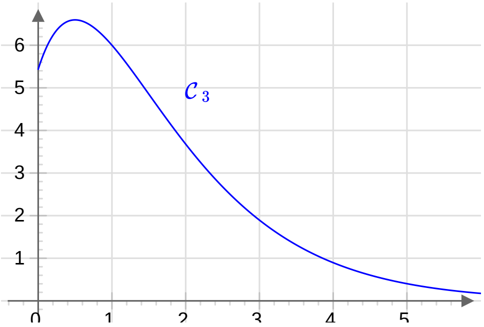


Courbe $\mathcal{C}_1$



Courbe $\mathcal{C}_2$

4. La courbe $\mathcal{C}_3$ ci-contre peut-elle être la représentation graphique sur $[0\ ;\ +\infty[$ d'une primitive de la fonction f ? Justifier.



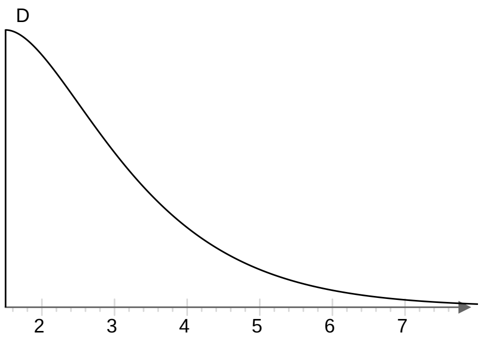
Partie B

Dans cette partie, on considère que la fonction f, définie et deux fois dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$, est définie par $f(x)=(4x-2)\mathrm{e}^{-x+1}$.
On notera respectivement f' et f'' la dérivée et la dérivée seconde de la fonction f.

1. Étude de la fonction f
   a. Montrer que $f'(x)=(-4x+6)\mathrm{e}^{-x+1}$.
   b. Utiliser ce résultat pour déterminer le tableau complet des variations de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$. On admet que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$.
   c. Étudier la convexité de la fonction f et préciser l'abscisse d'un éventuel point d'inflexion de la courbe représentative de f.

2. On considère une fonction F définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $F(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-x+1}$, où a et b sont deux nombres réels.
   a. Déterminer les valeurs des réels a et b telles que la fonction F soit une primitive de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$.
   b. On admet que $F(x) = (-4x-2)\mathrm{e}^{-x+1}$ est une primitive de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$. En déduire la valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-2} près, de l'intégrale $I = \displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^{8} f(x)\,\mathrm{d}x$.

3. Une municipalité a décidé de construire une piste de trottinette freestyle.
Le profil de cette piste est donné par la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $\left[\frac{3}{2}\ ;\ 8\right]$. L'unité de longueur est le mètre.
   a. Donner une valeur approchée au cm près de la hauteur du point de départ D.
   b. La municipalité a organisé un concours de graffiti pour orner le mur de profil de la piste. L'artiste retenue prévoit de couvrir environ 75 % de la surface du mur. Sachant qu'une bombe aérosol de 150 mL permet de couvrir une surface de 0,8 m ^{2}, déterminer le nombre de bombes qu'elle devra utiliser pour réaliser cette œuvre.



Exercice 9 -- *Baccalauréat Métropole 19 juin 2024* ★★

Partie A : étude de la fonction f

La fonction f est définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = x - 2 + \dfrac{1}{2}\ln x$, où ln désigne la fonction logarithme népérien. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$, on note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

1. a. Déterminer, en justifiant, les limites de f en 0 et en $+\infty$.
   b. Montrer que pour tout x appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$, on a : $f'(x) = \dfrac{2x+1}{2x}$.
   c. Étudier le sens de variation de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.
   d. Étudier la convexité de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.
2. 1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]0\ ;\ +\infty[$ une solution unique qu'on notera α et justifier que α appartient à l'intervalle $[1\ ;\ 2]$.
   2. Déterminer le signe de $f(x)$ pour $x \in]0\ ;\ +\infty[$.
   3. Montrer que $\ln(\alpha) = 2(2-\alpha)$.

Partie B : étude de la fonction g

La fonction g est définie sur $]0\ ;\ 1]$ par : $g(x) = -\dfrac{7}{8}x^2 + x - \dfrac{1}{4}x^2\ln x$.
On admet que la fonction g est dérivable sur $]0\ ;\ 1]$ et on note g' sa fonction dérivée.

1. Calculer $g'(x)$ pour $x \in]0\ ;\ 1]$ puis vérifier que $g'(x) = xf\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
2. a. Justifier que pour x appartenant à l'intervalle $\left]0\ ;\ \dfrac{1}{\alpha}\right[$, on a $f\left(\dfrac{1}{x}\right) > 0$.
   b. On admet le tableau de signes ci-contre.
   En déduire le tableau de variations de g sur l'intervalle $]0\ ;\ 1]$. Les images et les limites ne sont pas demandées.

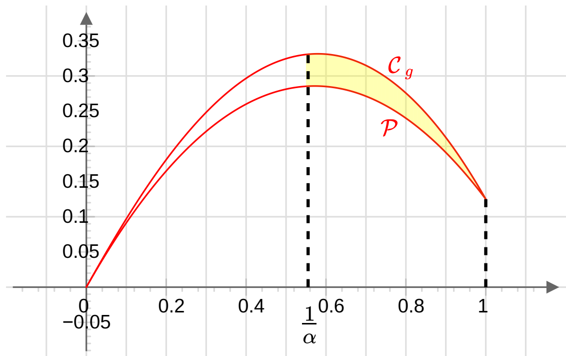
x	0		$\frac{1}{\alpha}$		1
$f\left(\frac{1}{x}\right)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Partie C : un calcul d'aire.

On a représenté sur le graphique ci-contre :

- La courbe $\mathcal{C}_g$ de la fonction g;
- La parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = -\dfrac{7}{8}x^2 + x$ sur l'intervalle $]0\ ;\ 1]$.

On souhaite calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine colorié compris entre les courbes $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{P}$, et les droites d'équations $x = \dfrac{1}{\alpha}$ et $x = 1$. On rappelle que $\ln(\alpha) = 2(2-\alpha)$.



1. a. Justifier la position relative des courbes C_g et $\mathcal{P}$ sur l'intervalle $]0\ ;\ 1]$.

   b. Démontrer l'égalité : $\displaystyle\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2 \ln x \,\mathrm{d}x = \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3}$

2. En déduire l'expression en fonction de α de l'aire $\mathcal{A}$.

Exercice 10 -- *Baccalauréat Polynésie 19 juin 2024* ★

Une entreprise fabrique des objets en plastique en injectant dans un moule de la matière fondue à $210\ ^\circ$C. On cherche à modéliser le refroidissement du matériau à l'aide d'une fonction f donnant la température du matériau injecté en fonction du temps t.
Le temps est exprimé en seconde et la température est exprimée en degré Celsius.
On admet que la fonction f cherchée est solution d'une équation différentielle de la forme suivante où m est une constante réelle que l'on cherche à déterminer:

$$(E): \quad y' + 0,02y = m$$

Partie A

1. Justifier l'affichage suivant d'un logiciel de calcul formel:

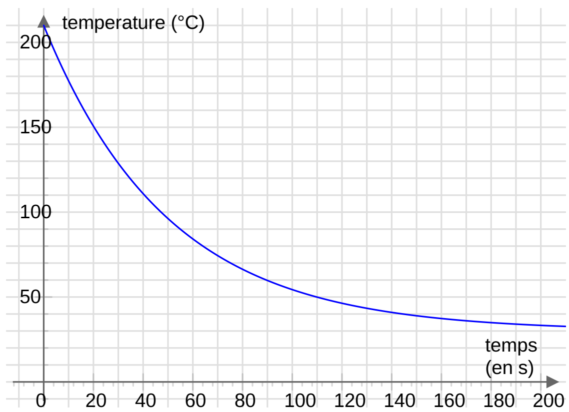
Entrée :	RésoudreEquationDifférentielle $(y' + 0,02y = m)$
Sortie :	$\boxed{\rightarrow}: y = k * \exp(-0.02 * t) + 50 * m$

2. La température de l'atelier est de 30 $^\circ$C. On admet que la température $f(t)$ tend vers 30°C lorsque t tend vers l'infini.
   Démontrer que $m = 0,6$.
3. Déterminer l'expression de la fonction f cherchée en tenant compte de la condition initiale $f(0) = 210$.

Partie B

On admet ici que la température (exprimée en degré Celsius) du matériau injecté en fonction du temps (exprimé en seconde) est donnée par la fonction dont l'expression et une représentation graphique sont données ci-dessous:

$$f(t) = 180\mathrm{e}^{-0,02t} + 30.$$



1. L'objet peut être démoulé lorsque sa température devient inférieure à 50 °C.
   a. Par lecture graphique, donner une valeur approchée du nombre T de secondes à attendre avant de démouler l'objet.
   b. Déterminer par le calcul la valeur exacte de ce temps T.
2. À l'aide d'une intégrale, calculer la valeur moyenne de la température sur les 100 premières secondes.

Exercice 11 -- *Baccalauréat Centres étrangers - 5 juin 2024* ★★

On considère l'équation différentielle

$$(E_0): \quad y' = y$$

où y est une fonction dérivable de la variable réelle x.

1. Démontrer que l'unique fonction constante solution de l'équation différentielle (E_0) est la fonction nulle.
2. Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle (E_0).
   On considère l'équation différentielle

$$(E): \quad y' = y - \cos(x) - 3\sin(x)$$

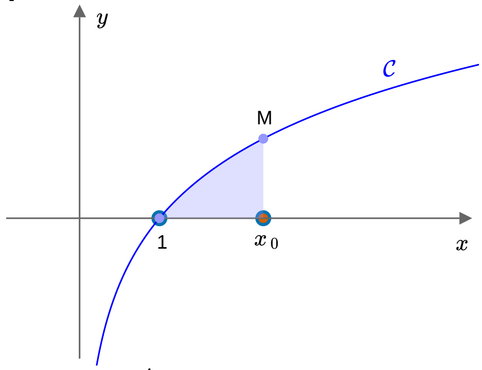
   où y est une fonction dérivable de la variable réelle x.
3. La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2\cos(x) + \sin(x)$.
   On admet qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$. Démontrer que la fonction h est solution de l'équation différentielle (E).

4. On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Démontrer que : « f est solution de (E) » est équivalent à « $f - h$ est solution de (E_0) ».
5. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).
6. Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 0$.
7. Calculer: $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-2\mathrm{e}^x + \sin(x) + 2\cos(x)\right]\, \mathrm{d}x$.

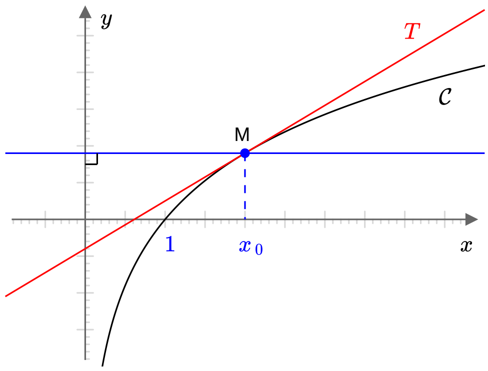
Exercice 12 -- *Baccalauréat Amérique du Nord - 22 mai 2024* ★★

Soit a un réel strictement positif. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = a\ln(x)$.
On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé. Soit x_0 un réel strictement supérieur à 1.

1. Déterminer l'abscisse du point d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ et de l'axe des abscisses.
2. Vérifier que la fonction F définie par $F(x) = a[x\ln(x) - x]$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
3. En déduire l'aire du domaine bleuté en fonction de a et de x_0 .



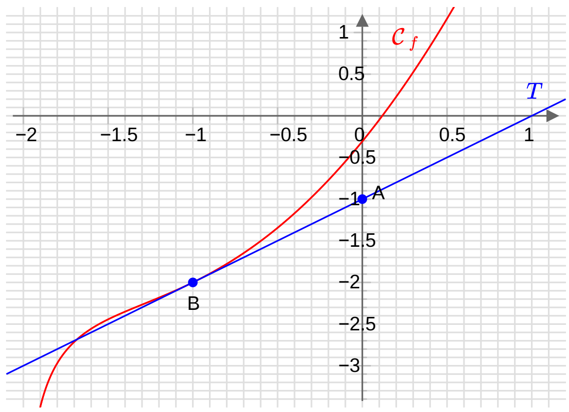
4. On note T la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point M d'abscisse x_0 . On appelle A le point d'intersection de la tangente T avec l'axe des ordonnées et B le projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.



5. Démontrer que la longueur AB est égale à une constante (c'est-à-dire à un nombre qui ne dépend pas de x_0) que l'on déterminera.
Le candidat prendra soin d'expliciter sa démarche.

Exercice 13 -- *Baccalauréat Métropole 20 juin 2024* ★★

On considère une fonction f définie et deux fois dérivable sur $]-2\,;+\infty[$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan, f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.
On a tracé ci-contre la courbe $\mathcal{C}_f$ et sa tangente T au point B d'abscisse -1.
On précise que la droite T passe par le point $A(0\,;\,-1)$.



Partie A : exploitation du graphique.

À l'aide du graphique, répondre aux questions ci-dessous.

1. Préciser $f(-1)$ et $f'(-1)$.
2. La fonction f est-elle convexe sur son ensemble de définition ? Justifier.
3. Conjecturer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ et donner une valeur arrondie à 10^{-1} près d'une solution.

Partie B : étude de la fonction f

On considère que la fonction f est définie sur $]-2\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = x^2 + 2x - 1 + \ln(x+2)$,
où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

1. Déterminer par le calcul la limite de la fonction f en -2. Interpréter graphique- ment ce résultat.
   On admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
2. Montrer que pour tout $x > -2$, $f'(x) = \dfrac{2x^2 + 6x + 5}{x+2}$.
3. Étudier les variations de la fonction f sur $]-2\ ;\ +\infty[$ puis dresser son tableau de variations complet.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]-2\ ;\ +\infty[$ et donner une valeur arrondie de α à 10^{-2} près.
5. En déduire le signe de $f(x)$ sur $]-2\ ;\ +\infty[$.
6. Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet un unique point d'inflexion et déterminer son abscisse.

Partie C : une distance minimale.

Soit g la fonction définie sur $]-2\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \ln(x+2)$.
On note $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\ ;\ I\ ,\ J)$, représentée ci-après.
Soit M un point de $\mathcal{C}_g$ d'abscisse x.
Le but de cette partie est de déterminer pour quelle valeur de x la distance JM est minimale.
On considère la fonction h définie sur $]-2\ ;\ +\infty[$ par $h(x) = JM^2$.

3 Probabilités

Exercice 14 -- *Baccalauréat Centres étrangers - 5 juin 2024* ★

Partie A

On définit la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ par : $f(x) = \dfrac{0,96x}{0,93x + 0,03}$.

1. Démontrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ 1]$, $f'(x) = \dfrac{0,028\,8}{(0,93x + 0,03)^2}$.
2. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.

Partie B

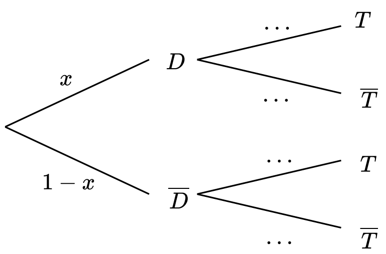
La lutte contre le dopage passe notamment par la réalisation de contrôles antidopage qui visent à déterminer si un sportif a fait usage de substances interdites.
Lors d'une compétition rassemblant $1\,000$ sportifs, une équipe médicale teste tous les concurrents. On propose d'étudier la fiabilité de ce test.
On appelle x le réel compris entre 0 et 1 qui désigne la proportion de sportifs dopés.
Lors de l'élaboration de ce test, on a pu déterminer que :

- la probabilité qu'un sportif soit déclaré positif sachant qu'il est dopé est égale à 0,96 ;
- la probabilité qu'un sportif soit déclaré positif sachant qu'il n'est pas dopé est égale à 0,03.

On note :

- D l'évènement : « le sportif est dopé ».
- T l'évènement : « le test est positif ».

  1. Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-contre :



  2. Déterminer, en fonction de x, la probabilité qu'un sportif soit dopé et ait un test positif.
  3. Démontrer que la probabilité de l'évènement T est égale à $0,93x + 0,03$.
  4. Pour cette question uniquement, on suppose qu'il y a 50 sportifs dopés parmi les $1\,000$ testés. La fonction f désigne la fonction définie à la partie A. Démontrer que la probabilité qu'un sportif soit dopé sachant que son test est positif est égale à $f(0,05)$. *En donner une valeur arrondie au centième.*
  5. On appelle valeur prédictive positive d'un test la probabilité que le sportif soit réellement dopé lorsque le résultat du test est positif.

1. Déterminer à partir de quelle valeur de x la valeur prédictive positive du test étudié sera supérieure ou égale à $0,9$. Arrondir le résultat au centième.
2. Un responsable de la compétition décide de ne plus tester l'ensemble des sportifs, mais de cibler les sportifs les plus performants supposés être plus fréquemment dopés. Quelle est la conséquence de cette décision sur la valeur prédictive positive du test ? *Argumenter en utilisant un résultat de la partie A.*

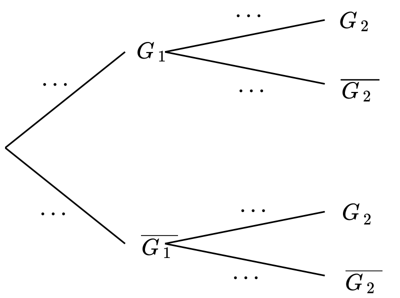
Exercice 15 -- *Baccalauréat Asie 11 juin 2024* ★

Léa passe une bonne partie de ses journées à jouer à un jeu vidéo et s'intéresse aux chances de victoire de ses prochaines parties.
Elle estime que si elle vient de gagner une partie, elle gagne la suivante dans 70 % des cas.
Mais si elle vient de subir une défaite, d'après elle, la probabilité qu'elle gagne la suivante est de $0,2$.
De plus, elle pense avoir autant de chance de gagner la première partie que de la perdre.
On s'appuiera sur les affirmations de Léa pour répondre aux questions de cet exercice. Pour tout entier naturel n non nul, on définit les évènements suivants:

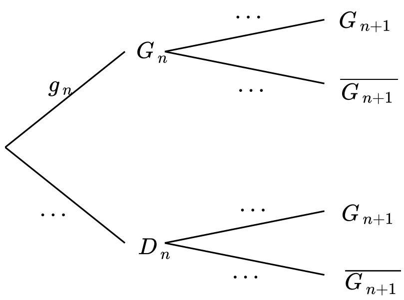
- G_n : « Léa gagne la n-ième partie de la journée » ;
- D_n : « Léa perd la n-ième partie de la journée ».

Pour tout entier naturel n non nul, on note g_n la probabilité de l'évènement G_n. On a donc $g_1 = 0,5$.

1. Quelle est la valeur de la probabilité conditionnelle $p_{G_1}(D_2)$?
2. Recopier et compléter l'arbre des probabilités ci-dessous qui modélise la situation pour les deux premières parties de la journée :



3. Calculer g_2.
4. Soit n un entier naturel non nul.
   a. Recopier et compléter l'arbre des probabilités ci-dessous qui modélise la situation pour les n-ième et $(n+1)$-ième parties de la journée.



   b. Justifier que pour tout entier naturel n non nul, $g_{n+1} = 0,5g_n + 0,2$.
5. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $v_n = g_n - 0,4$.
   a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera son premier terme et sa raison.
   b. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul : $g_n = 0,1 \times 0,5^{n-1} + 0,4$.
6. Étudier les variations de la suite (g_n).
7. Donner, en justifiant, la limite de la suite (g_n). Interpréter le résultat dans le contexte de l'énoncé.
8. Déterminer, par le calcul, le plus petit entier n tel que $g_n - 0,4 \leqslant 0,001$.
9. Recopier et compléter les lignes 4, 5 et 6 de la fonction suivante, écrite en langage Python, afin qu'elle renvoie le plus petit rang à partir duquel les termes de la suite (g_n) sont tous inférieurs ou égaux à $0,4 + e$, où e est un nombre réel strictement positif.

```
1 def seuil(e):
2     g = 0.5
3     n = 1
4     while ...:
5         g = 0.5*g+0.2
6         n = ...
7         return n
```

Exercice 16 -- *Baccalauréat Métropole 19 juin 2024* ★

Une agence de marketing a étudié la satisfaction des clients concernant le service clientèle à l'occasion de l'achat d'un téléviseur. Ces achats ont été réalisés soit sur internet, soit dans une chaîne de magasins d'électroménager, soit dans une enseigne de grandes surfaces. Les achats sur internet représentent $60\ \%$ des ventes, les achats en magasin d'électroménager 30% des ventes et ceux en grandes surfaces $10\ \%$ des ventes.
Une enquête montre que la proportion des clients satisfaits du service clientèle est de :

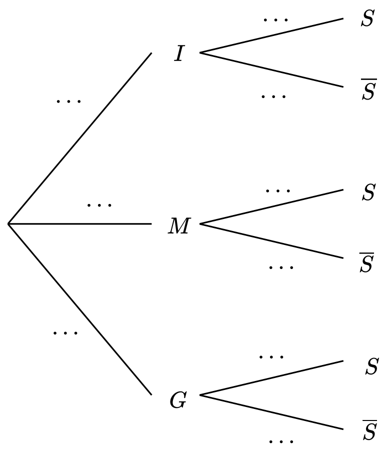
- $75\ \%$ pour les clients sur internet ;
- $90\ \%$ pour les clients en magasin d'électroménager ;
- $80\ \%$ pour les clients en grande surface.

On choisit au hasard un client ayant acheté le modèle de téléviseur concerné. On définit les évènements suivants :

- I : « le client a effectué son achat sur internet »;
- M : « le client a effectué son achat en magasin d'électroménager »;
- G : « le client a effectué son achat en grande surface »;
- S : « le client est satisfait du service clientèle ».

Si A est un évènement quelconque, on notera $\overline{A}$ son évènement contraire et $P(A)$ sa probabilité.

1. Reproduire et compléter l'arbre ci-contre.



2. Calculer la probabilité que le client ait réalisé son achat sur internet et soit satisfait du service clientèle.
3. Démontrer que $P(S) = 0,8$.
4. Un client est satisfait du service clientèle. Quelle est la probabilité qu'il ait effectué son achat sur internet ? On donnera un résultat arrondi à 10^{-3} près.
5. Pour réaliser l'étude, l'agence doit contacter chaque jour 30 clients parmi les acheteurs du téléviseur. On suppose que le nombre de clients est suffisamment important pour assimiler le choix des 30 clients à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 30 clients, associe le nombre de clients satisfaits du service clientèle.
   a. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
   b. Déterminer la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, qu'au moins 25 clients soient satisfaits dans un échantillon de 30 clients contactés sur une même journée.
6. En résolvant une inéquation, déterminer la taille minimale de l'échantillon de clients à contacter pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux ne soit pas satisfait soit supérieure à $0,99$.
7. Dans les deux questions **a.** et **b.** qui suivent, on ne s'intéresse qu'aux seuls achats sur internet.
   Lorsqu'une commande de téléviseur est passée par un client, on considère que le temps de livraison du téléviseur est modélisé par une variable aléatoire T égale à la somme de deux variables aléatoires T_1 et T_2.
   La variable aléatoire T_1 modélise le nombre entier de jours pour l'acheminement du téléviseur depuis un entrepôt de stockage vers une plateforme de distribution. La variable aléatoire T_2 modélise le nombre entier de jours pour l'acheminement du téléviseur depuis cette plateforme jusqu'au domicile du client.
   On admet que les variables aléatoires T_1 et T_2 sont indépendantes, et on donne :
   - L'espérance $E\left(T_1\right) = 4$ et la variance $V\left(T_1\right) = 2$;
   - L'espérance $E\left(T_2\right) = 3$ et la variance $V\left(T_2\right) = 1$.

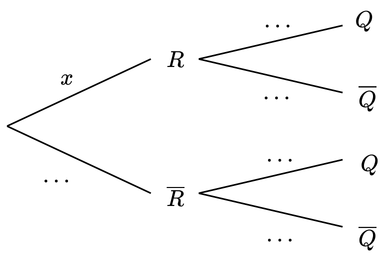
   a. Déterminer l'espérance $E(T)$ et la variance $V(T)$ de la variable aléatoire T.
   b. Un client passe une commande de téléviseur sur internet. Justifier que la probabilité qu'il reçoive son téléviseur entre 5 et 9 jours après sa commande est supérieure ou égale à $\dfrac{2}{3}$.

Exercice 17 -- *Baccalauréat Métropole 20 juin 2024* ★

La directrice d'une école souhaite réaliser une étude auprès des étudiants qui ont passé l'examen de fin d'étude, pour analyser la façon dont ils pensent avoir réussi cet examen.
Pour cette étude, on demande aux étudiants à l'issue de l'examen de répondre indivi- duellement à la question : « Pensez-vous avoir réussi l'examen ? ». Seules les réponses « oui » ou « non » sont possibles, et on observe que 91,7 % des étudiants interrogés ont répondu « oui ».
Suite à la publication des résultats à l'examen, on découvre que :

- 65 % des étudiants ayant échoué ont répondu « non » ;
- 98 % des étudiants ayant réussi ont répondu « oui ».

On interroge au hasard un étudiant qui a passé l'examen. On note R l'évènement « l'étudiant a réussi l'examen » et Q l'évènement « l'étudiant a répondu « oui » à la question ».
Pour un évènement A quelconque, on note $P(A)$ sa probabilité et A son évènement contraire.
Dans tout l'exercice, les probabilités sont, si besoin, arrondies à 10^{-3} *près.*



1. Préciser les valeurs des probabilités $P(Q)$ et $P_{\overline{R}}(\overline{Q})$.
2. On note x la probabilité que l'étudiant interrogé ait réussi l'examen.
   a. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contres.
   b. Montrer que $x = 0,9$.
3. L'étudiant interrogé a répondu « oui » à la question. Quelle est la probabilité qu'il ait réussi l'examen ?
4. La note obtenue par un étudiant interrogé au hasard est un nombre entier entre 0 et 20. On suppose qu'elle est modélisée par une variable aléatoire N qui suit la loi binomiale de paramètres $(20; 0,615)$.

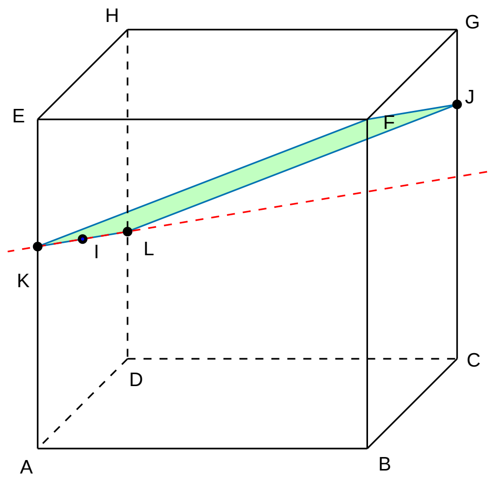
La directrice souhaite attribuer une récompense aux étudiants ayant obtenu les meilleurs résultats.
À partir de quelle note doit-elle attribuer les récompenses pour que 65% des étudiants soient récompensés ?

5. On interroge au hasard dix étudiants.
Les variables aléatoires $N_1, N_2, \ldots, N_{10}$ modélisent la note sur 20 obtenue à l'examen par chacun d'entre eux. On admet que ces variables sont indépendantes et suivent la même loi binomiale de paramètres $(20\ ;\ 0,615)$.
Soit S la variable définie par $S = N_1 + N_2 + \cdots + N_{10}$.
Calculer l'espérance $E(S)$ et la variance $V(S)$ de la variable aléatoire S.
6. On considère la variable aléatoire $M = \dfrac{S}{10}$.
   a. Que modélise cette variable aléatoire M dans le contexte de l'exercice ?
   b. Justifier que $E(M) = 12,3$ et $V(M) = 0,473\,55$.
   c. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, justifier l'affirmation ci-dessous. « La probabilité que la moyenne des notes de dix étudiants pris au hasard soit strictement comprise entre $10,3$ et $14,3$ est d'au moins 80% ».

4 Géométrie dans l'espace

Exercice 18 ★★

$ABCDEFGH$ est un cube. I est le centre de la face $ADHE$ et J est un point du segment $[CG]$.
Il existe donc $a \in [0\,;1]$ tel que $\overrightarrow{CJ} = a\overrightarrow{CG}$.
On note (d) la droite passant par I et parallèle à (FJ).
On note K et L les points d'intersection de la droite (d) et des droites (AE) et (DH).
On se place dans le repère $\left(A\,; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.



Partie A : Dans cette partie $a = \dfrac{2}{3}$

1. Donner les coordonnées des points F, I et J.
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d).
3. a. Montrer que le point de coordonnées $\left(0\,;0\,;\dfrac{2}{3}\right)$ est le point K.
   b. Déterminer les coordonnées du point L, intersection des droites (d) et (DH).
4. a. Démontrer que le quadrilatère $FJLK$ est un parallélogramme.
   b. Démontrer que le quadrilatère $FJLK$ est un losange.
   c. Le quadrilatère $FJLK$ est-il un carré ?

Partie B : Cas général

On admet que les coordonnées des points K et L sont : $K\left(0\,;0\,;1-\dfrac{a}{2}\right)$ et $L\left(0\,;1\,;\dfrac{a}{2}\right)$. On rappelle que $a \in [0\,;1]$.

1. Déterminer les coordonnées de J en fonction de a.
2. Montrer que le quadrilatère $FJLK$ est un parallélogramme.
3. Existe-t-il des valeurs de a telles que le quadrilatère $FJLK$ soit un losange ? Justifier.
4. Existe-t-il des valeurs de a telles que le quadrilatère $FJLK$ soit un carré ? Justifier.

Exercice 19 -- *Baccalauréat Centres étrangers 5 juin 2024* ★

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,,\vec{k})$. On considère :

- les points A$(-2\ ;\ 0\ ;\ 2)$, B$(-1\ ;\ 3\ ;\ 0)$, C$(1\ ;\ -1\ ;\ 2)$ et D$(0\ ;\ 0\ ;\ 3)$.
- la droite $\mathcal{D}_1$ dont une représentation paramétrique est $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & t \\ y & = & 3t \\ z & = & 3+5t \end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$.
- la droite $\mathcal{D}_2$ dont une représentation paramétrique est $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1+3s \\ y & = & -1-5s \\ z & = & 2-6s \end{array}\right.$ avec $s \in \mathbb{R}$.

1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. a. Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$ est orthogonal au plan (ABC).
   b. Justifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $x+3y+5z-8=0$.
   c. En déduire que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.
3. 1. Justifier que la droite $\mathcal{D}_1$ est la hauteur du tétraèdre ABCD issue de D. On admet que la droite $\mathcal{D}_2$ est la hauteur du tétraèdre ABCD issue de C.
   2. Démontrer que les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.
4. 1. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du point D sur le plan (ABC).
   2. Calculer la distance du point D au plan (ABC). *Arrondir le résultat au centième.*

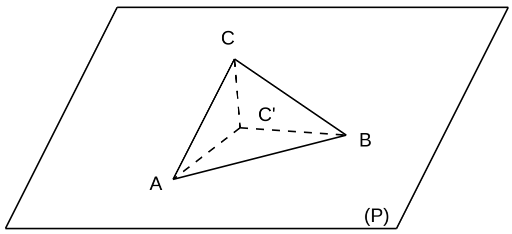
Exercice 20 -- *Baccalauréat Asie 11 juin 2024* ★★

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$ de l'espace, on considère le plan (P) d'équation: (P) : $2x+2y-3z+1=0$.
On considère les trois points A, B et C de coordonnées: A$(1\ ;\ 0\ ;\ 1)$, B$(2\ ;\ -1\ ;\ 1)$ et C$(-4\ ;\ -6\ ;\ 5)$.
Le but de cet exercice est d'étudier le rapport des aires entre un triangle et son projeté orthogonal dans un plan.

Partie A

1. Pour chacun des points A, B et C, vérifier s'il appartient au plan (P).
2. Montrer que le point C$'(0\ ;\ -2\ ;\ -1)$ est le projeté orthogonal du point C sur le plan (P).
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).
4. On admet l'existence d'un unique point H vérifiant les deux conditions
   - H $\in$ (AB) ;
   - (AB) et (HC) sont orthogonales.

   Déterminer les coordonnées du point H.



Partie B

On admet que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{HC}}$ sont : $\overrightarrow{\mathrm{HC}}\begin{pmatrix}-\frac{11}{2}\\-\frac{11}{2}\\4\end{pmatrix}$.

1. Calculer la valeur exacte de $\left\|\overrightarrow{\mathrm{HC}}\right\|$.
2. Soit S l'aire du triangle ABC. Déterminer la valeur exacte de S.

Partie C

On admet que HC$'=\sqrt{\dfrac{17}{2}}$.

1. Soit $\alpha=\widehat{\mathrm{CHC'}}$. Déterminer la valeur de $\cos(\alpha)$.
2. 1. Montrer que les droites (C$'$H) et (AB) sont perpendiculaires.
   2. Calculer S' l'aire du triangle ABC$'$, on donnera la valeur exacte.
   3. Donner une relation entre S, S' et $\cos(\alpha)$.

Exercice 21 ★★

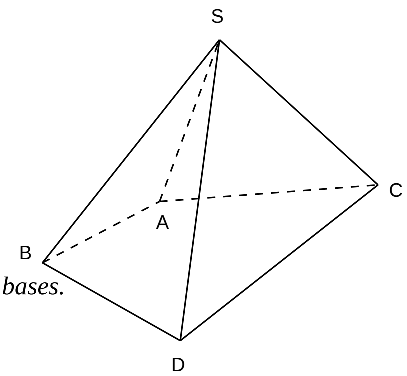
Dans l'espace, on considère un tétraèdre $ABCD$ dont les faces ABC, ACD et ABD sont des triangles rectangles et isocèles en A. On désigne par E, F et G les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$.
On choisit AB pour unité de longueur et on se place dans le repère orthonormé $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD}\right)$ de l'espace.

1. On désigne par $\mathcal{P}$ le plan qui passe par A et qui est orthogonal à la droite (DF).
   On note H le point d'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite (DF).
   a. Donner les coordonnées des points D et F.

b. Donner une représentation paramétrique de la droite (DF).
c. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.
d. Calculer les coordonnées du point H.
e. Démontrer que l'angle $\widehat{EHG}$ est un angle droit.

2. On désigne par M un point de la droite (DF) et par t le réel tel que $\overrightarrow{DM} = t\overrightarrow{DF}$. On note α la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{EMG}$.
Le but de cette question est de déterminer la position du point M pour que α soit maximale.
   a. Démontrer que $ME^2 = \dfrac{3}{2}t^2 - \dfrac{5}{2}t + \dfrac{5}{4}$.
   b. Démontrer que le triangle MEG est isocèle en M.
   En déduire que $ME \sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.
   c. Justifier que α est maximale si et seulement si $\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$ est maximal.
   En déduire que α est maximale si et seulement si ME^2 est minimal.
   d. Conclure.

Exercice 22 -- *Baccalauréat Asie 10 juin 2024* ★

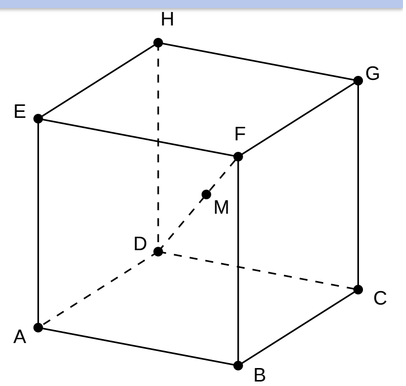


Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'unité 1 cm, on considère les points :
A$(3 ; -1 ; 1)$; B$(4 ; -1 ; 0)$; C$(0 ; 3 ; 2)$; D$(4 ; 3 ; -2)$ et S$(2 ; 1 ; 4)$.
Dans cet exercice on souhaite montrer que SABDC est une pyramide à base ABDC trapézoïdale de sommet S, afin de calculer son volume.

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. a. Montrer que les points A, B, C et D sont coplanaires.
   b. Montrer que le quadrilatère ABDC est un trapèze de bases [AB] et [CD].
   On rappelle qu'un trapèze est un quadrilatère ayant deux côtés opposés parallèles appelés bases.
3. a. Démontrer que le vecteur $\vec{n}(2 ; 1 ; 2)$ est un vecteur normal au plan (ABC).
   b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
   c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par le point S et orthogonale au plan (ABC).
   d. On note I le point d'intersection de la droite Δ et du plan (ABC). Montrer que le point I a pour coordonnées $\left(\dfrac{2}{3} ; \dfrac{1}{3} ; \dfrac{8}{3}\right)$, puis montrer que $\text{SI} = 2$ cm.
4. a. Vérifier que le projeté orthogonal H du point B sur la droite (CD) a pour coordonnées H$(3 ; 3 ; -1)$ et montrer que $\text{HB} = 3\sqrt{2}$ cm.
   b. Calculer la valeur exacte de l'aire du trapèze ABDC. On rappelle que l'aire d'un trapèze est donnée par la formule $\mathcal{A} = \dfrac{b+B}{2} \times h$ où b et B sont les longueurs des bases du trapèze et h sa hauteur.
5. Déterminer le volume de la pyramide SABDC. On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule

$$V = \frac{1}{3} \times \text{ aire de la base } \times \text{ hauteur}$$

Exercice 23 ★★



On considère un cube $ABCDEFGH$ dont la représentation graphique en perspective cavalière est donnée ci-contre.
Les arêtes sont de longueur 1.
L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(D ; \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH}\right)$.

Partie A

1. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est normal au plan (EBG).
2. Déterminer une équation cartésienne du plan (EBG).

3. En déduire les coordonnées du point I intersection de la droite (DF) et du plan (EBG).
On démontrerait de la même manière que le point J intersection de la droite (DF) et du plan (AHC) a pour coordonnées $\left(\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\right)$.

Partie B

À tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ 1]$, on associe le point M du segment $[DF]$ tel que $\overrightarrow{DM} = x\overrightarrow{DF}$.
On s'intéresse à l'évolution de la mesure θ en radian de l'angle $\widehat{EMB}$ lorsque le point M parcourt le segment $[DF]$. On a $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

1. Que vaut θ si le point M est confondu avec le point D ? avec le point F ?
2. a. Justifier que les coordonnées du point M sont $(x\ ;\ x\ ;\ x)$.
   b. Montrer que $\cos(\theta) = \dfrac{3x^2-4x+1}{3x^2-4x+2}$. On pourra pour cela s'intéresser au produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{ME}$ et $\overrightarrow{MB}$.
3. On a construit ci-dessous le tableau de variations de la fonction $f\ :\ x \longmapsto \dfrac{3x^2-4x+1}{3x^2-4x+2}$.

   Pour quelles positions du point M sur le segment $[DF]$:
   a. le triangle MEB est-il rectangle en M ?
   b. l'angle θ est-il maximal ?

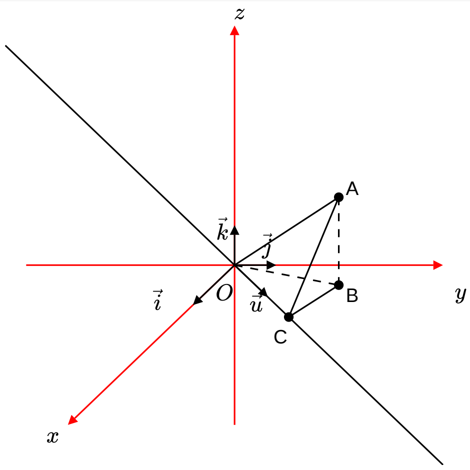
x	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
$f(x)$	$\frac{1}{2}$ ↘	0 ↘	$-\frac{1}{2}$ ↗	0

Exercice 24 ★★

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$ on considère :

- le point A de coordonnées $(1\,;3\,;2)$,
- le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$,
- la droite d passant par l'origine O du repère et admettant pour vecteur directeur $\vec{u}$.

Le but de cet exercice est de déterminer le point de d le plus proche du point A et d'étudier quelques propriétés de ce point.
On pourra s'appuyer sur la figure ci-contre pour raisonner au fur et à mesure des questions.



1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.
2. Soit t un nombre réel quelconque, et M un point de la droite d, le point M ayant pour coordonnées $(t\ ;\ t\ ;\ 0)$.
   a. On note AM la distance entre les points A et M. Démontrer que: $AM^2 = 2t^2 - 8t + 14$.
   b. Démontrer que le point M_0 de coordonnées $(2\,;2\,;0)$ est le point de la droite d pour lequel la distance AM est minimale.
   On admettra que la distance AM est minimale lorsque son carré AM^2 est minimal.
3. Démontrer que les droites (AM_0) et d sont orthogonales.
4. On appelle A' le projeté orthogonal du point A sur le plan d'équation cartésienne $z = 0$. Le point A' admet donc pour coordonnées $(1\,;3\,;0)$.
   Démontrer que le point M_0 est le point du plan $(AA'M_0)$ le plus proche du point O, origine du repère.
5. Calculer le volume de la pyramide $OM_0A'A$.
   On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par: $V = \dfrac{1}{3}\mathcal{B}h$, où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h est la hauteur de la pyramide correspondant à cette base.

Exercice 25 ★★

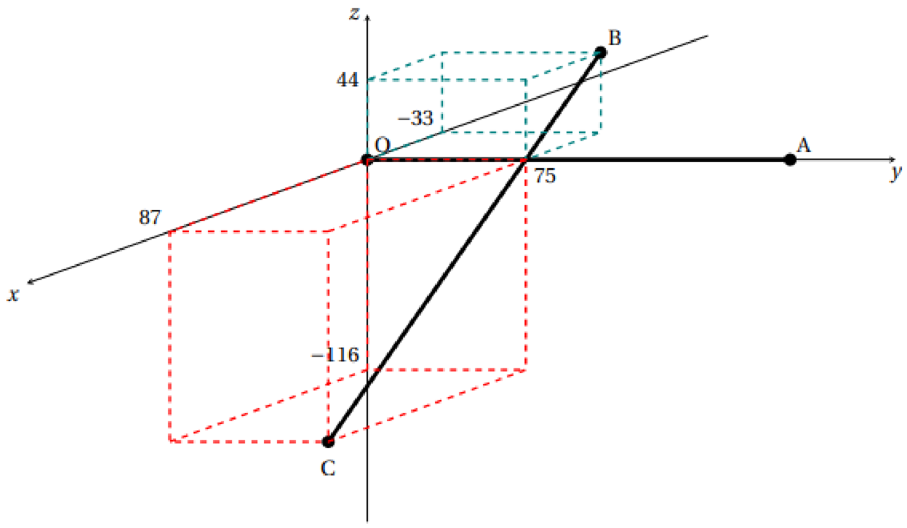
L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$.
On considère les points $A(3\ ;\ 0\ ;\ 1)$, $B(2\ ;\ 1\ ;\ 2)$ et $C(-2\ ;\ -5\ ;\ 1)$.

1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.
3. Vérifier que le plan (ABC) a pour équation cartésienne: $-x+y-2z+5=0$.
4. On considère le point $S(1\ ;\ -2\ ;\ 4)$.
   Déterminer la représentation paramétrique de la droite (Δ), passant par S et orthogonale au plan (ABC).
5. On appelle H le point d'intersection de la droite (Δ) et du plan (ABC).
   Montrer que les coordonnées de H sont $(0\ ;\ -1\ ;\ 2)$.
6. Calculer la valeur exacte de la distance SH.
7. On considère le cercle $\mathcal{C}$, inclus dans le plan (ABC), de centre H, passant par le point B. On appelle $\mathcal{D}$ le disque délimité par le cercle $\mathcal{C}$.
   Déterminer la valeur exacte de l'aire du disque $\mathcal{D}$.
8. En déduire la valeur exacte du volume du cône de sommet S et de base le disque $\mathcal{D}$.

Exercice 26 -- *Centres étrangers Suède - 6 juin 2024* ★★

On modélise un passage de spectacle de voltige aérienne en duo de la manière suivante :

- on se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, une unité représentant un mètre;
- l'avion n°1 doit relier le point O au point $\mathrm{A}(0\ ;\ 200\ ;\ 0)$ selon une trajectoire rectiligne, à la vitesse constante de 200 m/s;
- l'avion n°2 doit, quant à lui, relier le point $\mathrm{B}(-33\ ;\ 75\ ;\ 44)$ au point $\mathrm{C}(87\ ;\ 75\ ;\ -116)$ également selon une trajectoire rectiligne, et à la vitesse constante de 200 m/s.
- au même instant, l'avion n°1 est au point O et l'avion n°2 est au point B.



1. Justifier que l'avion n°2 mettra autant de temps à parcourir le segment $[\mathrm{BC}]$ que l'avion n°1 à parcourir le segment $[\mathrm{OA}]$.
2. Montrer que les trajectoires des deux avions se coupent.
3. Les deux avions risquent-ils de se percuter lors de ce passage ?

5 Combinatoire et dénombrement

Exercice 27 -- *Centres étrangers - 6 juin 2024* ★★

Un sac opaque contient huit jetons numérotés de 1 à 8, indiscernables au toucher.
À trois reprises, un joueur pioche un jeton dans ce sac, note son numéro, puis le remet dans le sac.
Dans ce contexte, on appelle « tirage » la liste ordonnée des trois numéros obtenus.
Par exemple, si le joueur pioche le jeton numéro 4, puis le jeton numéro 5, puis le jeton numéro 1, alors le tirage correspondant est $(4\ ;\ 5\ ;\ 1)$.

1. Déterminer le nombre de tirages possibles.
2. a. Déterminer le nombre de tirages sans répétition de numéro.
   b. En déduire le nombre de tirages contenant au moins une répétition de numéro.

   On note X_1 la variable aléatoire égale au numéro du premier jeton pioché, X_2 celle égale au numéro du deuxième jeton pioché et X_3 celle égale au numéro du troisième jeton pioché.

   Puisqu'il s'agit d'un tirage avec remise, les variables aléatoires X_1, X_2, et X_3 sont indépendantes et suivent la même loi de probabilité.
3. Établir la loi de probabilité de la variable aléatoire X_1
4. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X_1

   On note $S=X_1+X_2+X_3$ la variable aléatoire égale à la somme des numéros des trois jetons piochés.
5. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire S.

6. Déterminer $P(S=24)$.
7. Si un joueur obtient une somme supérieure ou égale à 22, alors il gagne un lot.
   a. Justifier qu'il existe exactement 10 tirages permettant de gagner un lot.
   b. En déduire la probabilité de gagner un lot.

Exercice 28 -- *Baccalauréat Asie 11 juin 2024* ★★

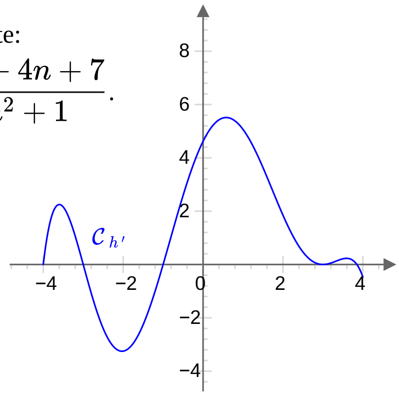
Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. Soit (u_n) une suite définie pour tout entier naturel n et vérifiant la relation suivante:

$$\text{pour tout entier naturel } n,\quad \frac{1}{2} < u_n \leqslant \frac{3n^2+4n+7}{6n^2+1}.$$

Affirmation 1 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$.

2. Soit h une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-4\ ;\ 4]$.
La représentation graphique $\mathcal{C}_{h'}$ de sa fonction dérivée h' est donnée ci-contre.



Affirmation 2 : La fonction h est convexe sur $[-1\ ;\ 3]$.

3. Le code d'un immeuble est composé de 4 chiffres (qui peuvent être identiques) suivis de deux lettres distinctes parmi A, B et C (exemple: 1232BA).
Affirmation 3 : Il existe 20 634 codes qui contiennent au moins un 0.`

4. On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = x\ln x$.
Affirmation 4 : La fonction f est une solution sur $]0\ ;\ +\infty[$ de l'équation différentielle $xy' - y = x$.

Exercice 29 -- *Baccalauréat Asie 24 mars 2023* ★★

Pour chacune des cinq questions de cet exercice, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.

On considère L une liste de nombres constituée de termes consécutifs d'une suite arithmétique de premier terme 7 et de raison 3, le dernier nombre de la liste est $2\,023$ soit :

$$L = [7,\ 10,\ \ldots,\ 2\,023].$$

Question 1 : Le nombre de termes de cette liste est :

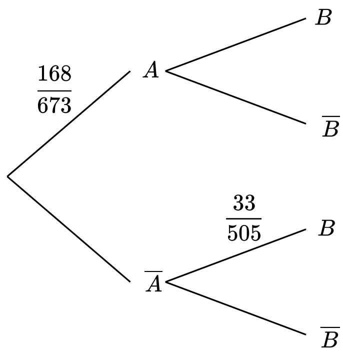
Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$2\,023$	673	672	$2\,016$

Question 2 : On choisit au hasard un nombre dans cette liste. La probabilité de tirer un nombre pair est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\frac{1}{2}$	$\frac{34}{673}$	$\frac{336}{673}$	$\frac{337}{673}$

On rappelle qu'on choisit au hasard un nombre dans cette liste. :
On s'intéresse aux évènements suivants :
- Évènement A : « obtenir un multiple de 4 » ;
- Évènement B : « obtenir un nombre dont le chiffre des unités est 6 ».

Pour répondre aux questions suivantes on pourra utiliser l'arbre pondéré ci-dessous et on donne $P(A\cap B) = \frac{34}{673}$.



Question 3 : La probabilité d'obtenir un multiple de 4 ayant 6 comme chiffre des unités est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\frac{168}{673}\times\frac{34}{673}$	$\frac{34}{673}$	$\frac{17}{84}$	$\frac{168}{34}$

Question 4 : $P_B(A)$ est égale à :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\frac{36}{168}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{33}{168}$	$\frac{34}{67}$

Question 5 : On choisit, au hasard, successivement, 10 éléments de cette liste.
Un élément peut être choisi plusieurs fois. La probabilité qu'aucun de ces 10 nombres ne soit un multiple de 4 est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\left(\dfrac{505}{673}\right)^{10}$	$1-\left(\dfrac{505}{673}\right)^{10}$	$\left(\dfrac{168}{673}\right)^{10}$	$1-\left(\dfrac{168}{673}\right)^{10}$

Exercice 30 ★

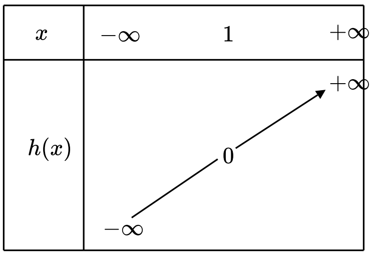
Question 1 :
On considère la suite numérique (u_n) définie pour tout n entier naturel par $u_n = \dfrac{1+2^n}{3+5^n}$. Cette suite :

a. diverge vers $+\infty$ b. converge vers $\dfrac{2}{5}$ c. converge vers 0 d. converge vers $\dfrac{1}{3}$

Question 2 :
Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = x^2 \ln x$.
L'expression de la fonction dérivée de f est :

a. $f'(x) = 2x\ln x$ b. $f'(x) = x(2\ln x + 1)$ c. $f'(x) = 2$ d. $f'(x) = x$

Question 3 :
On considère une fonction h définie et continue sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variations est donné ci-contre.
On note H la primitive de h définie sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.
Elle vérifie la propriété :



a. H est positive sur $]-\infty\ ;\ 0]$. b. H est croissante sur $]-\infty\ ;\ 1]$.
c. H est négative sur $]-\infty\ ;\ 1]$. d. H est croissante sur $\mathbb{R}$.

Question 4 :
Soit deux réels a et b avec $a < b$.
On considère une fonction f définie, continue, strictement croissante sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$ et qui s'annule en un réel α.
Parmi les propositions suivantes, la fonction en langage Python qui permet de donner une valeur approchée de α à $0,001$ est :

a.

```python
def racine(a, b):
    while abs(b - a) >= 0.001:
        m = (a + b)/2
        if f(m) < 0 :
            b = m
        else:
            a = m
    return m
```

b.

```python
def racine(a, b):
    m = (a + b)/2
    while abs(b - a) >= 0.001:
        if f(m) < 0 :
            a = m
        else:
            b = m
    return m
```

c.

```python
def racine(a, b):
    m = (a + b)/2
    while abs(b - a) <= 0.001:
        if f(m) < 0 :
            a = m
        else:
            b = m
    return m
```

d.

```python
def racine(a, b):
    while abs(b - a) >= 0.001:
        m = (a + b)/2
        if f(m) < 0 :
            a = m
        else:
            b = m
    return m
```

Question 5 :
Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher dont 7 sont bleues et les autres vertes.
On effectue trois tirages successifs avec remise. La probabilité d'obtenir exactement deux boules vertes est :

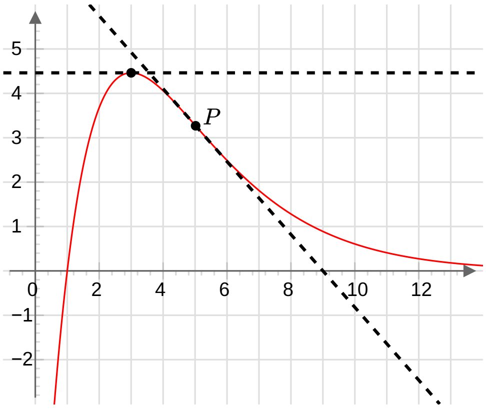
a. $\left(\dfrac{7}{10}\right)^2 \times \dfrac{3}{10}$ b. $\left(\dfrac{3}{10}\right)^2$ c. $\dbinom{10}{2}\left(\dfrac{7}{10}\right)\left(\dfrac{3}{10}\right)^2$ d. $\dbinom{3}{2}\left(\dfrac{7}{10}\right)\left(\dfrac{3}{10}\right)^2$

Exercice 31 ★★

Question 1 :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^x$.
Une primitive F sur $\mathbb{R}$ de la fonction f est définie par :

a. $F(x) = \dfrac{1}{2}x^2\mathrm{e}^x$ b. $F(x) = (x-1)\mathrm{e}^x$ c. $F(x) = (x+1)\mathrm{e}^x$ d. $F(x) = \dfrac{2}{x}\mathrm{e}^{x^2}$

Question 2 :



La courbe $\mathcal{C}$ ci-dessous représente une fonction f définie et deux fois dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$. On sait que :

- le maximum de la fonction f est atteint au point d'abscisse 3 ;
- le point P d'abscisse 5 est l'unique point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}$.

On a :

a. pour tout $x \in]0\ ;\ 5[$, $f(x)$ et $f'(x)$ sont de même signe;
b. pour tout $x \in]5\ ;\ +\infty[$, $f(x)$ et $f'(x)$ sont de même signe;
c. pour tout $x \in]0\ ;\ 5[$, $f'(x)$ et $f''(x)$ sont de même signe;
d. pour tout $x \in]5\ ;\ +\infty[$, $f(x)$ et $f''(x)$ sont de même signe.

Question 3 :

On considère la fonction g définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(t) = \dfrac{a}{b + \mathrm{e}^{-t}}$ où a et b sont deux nombres réels.

On sait que $g(0) = 2$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} g(t) = 3$. Les valeurs de a et b sont :

a. $a = 2$ et $b = 3$ b. $a = 4$ et $b = \dfrac{4}{3}$ c. $a = 4$ et $b = 1$ d. $a = 6$ et $b = 2$

Question 4 :

Alice dispose de deux urnes A et B contenant chacune quatre boules indiscernables au toucher.
L'urne A contient deux boules vertes et deux boules rouges. L'urne B contient trois boules vertes et une boule rouge. Alice choisit au hasard une urne puis une boule dans cette urne. Elle obtient une boule verte. La probabilité qu'elle ait choisi l'urne B est :

a. $\dfrac{3}{8}$ b. $\dfrac{1}{2}$ c. $\dfrac{3}{5}$ d. $\dfrac{5}{8}$

Question 5 :

On pose $S = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{100}$. Parmi les scripts Python ci-dessous, celui qui permet de calculer la somme S est :

a.

```python
def somme_a():
    S = 0
    for k in range(100):
        S = 1/(k+1)
    return S
```

b.

```python
def somme_b():
    S = 0
    for k in range(100):
        S = S+1/(k+1)
    return S
```

c.

```python
def somme_c():
    k = 0
    while S < 100:
        S = S+1/(k+1)
    return S
```

d.

```python
def somme_d():
    k = 0
    while k < 100:
        S = S+1/(k+1)
    return S
```

Exercice 32 -- *Baccalauréat Polynésie 20 juin 2024* ★

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM) qui comprend cinq questions. Les cinq questions sont indépendantes.
*Pour chacune des questions, **une seule des quatre réponses est exacte**. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question suivi de la lettre correspondant à la réponse exacte.*
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou une absence de réponse ne rapporte, ni n'enlève aucun point.

1. La solution f de l'équation différentielle $y' = -3y + 7$ telle que $f(0) = 1$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

   A. $f(x) = \mathrm{e}^{-3x}$ **B.** $f(x) = -\dfrac{4}{3}\mathrm{e}^{-3x} + \dfrac{7}{3}$ **C.** $f(x) = \mathrm{e}^{-3x} + \dfrac{7}{3}$ **D.** $f(x) = -\dfrac{10}{3}\mathrm{e}^{-3x} - \dfrac{7}{3}$

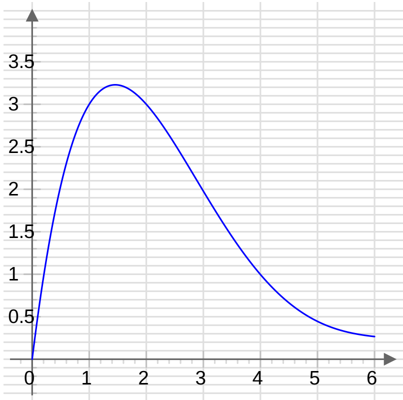
2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 \ln\left(x^2 + 4\right)$.

   Alors $\displaystyle\int_0^2 g'(x)\,\mathrm{d}x$ vaut, à 10^{-1} près :

   A. 4,9 **B.** $8,3$ **C.** $1,7$ **D.** $7,5$

3. La courbe d'une fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ est donnée ci-dessous.

Un encadrement de l'intégrale $I = \int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x$ est :



A. $0 \leqslant I \leqslant 4$

B. $1 \leqslant I \leqslant 5$

C. $5 \leqslant I \leqslant 10$

D. $10 \leqslant I \leqslant 15$

4. Une professeure enseigne la spécialité mathématiques dans une classe de 31 élèves de terminale.
Elle veut former un groupe de 5 élèves. De combien de façons différentes peut-elle former un tel groupe de 5 élèves ?

A. 31^5 **B.** $31 \times 30 \times 29 \times 28 \times 27$ **C.** $31 + 30 + 29 + 28 + 27$ **D.** $\binom{31}{5}$

5. La professeure s'intéresse maintenant à l'autre spécialité des 31 élèves de son groupe :
   - 10 élèves ont choisi la spécialité physique-chimie ;
   - 20 élèves ont choisi la spécialité SES ;
   - 1 élève a choisi la spécialité LLCE espagnol.

   Elle veut former un groupe de 5 élèves comportant exactement 3 élèves ayant choisi la spécialité SES. De combien de façons différentes peut-elle former un tel groupe ?

A. $\binom{20}{3} \times \binom{11}{2}$ **B.** $\binom{20}{3} + \binom{11}{2}$ **C.** $\binom{20}{3}$ **D.** $20^3 \times 11^2$

6 QCM et vrai/faux

Exercice 33 -- *Baccalauréat Amérique du Nord 21 mai 2024* ★

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple.
Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Les quatre questions sont indépendantes.
L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$.

1. On considère les points $A(1\ ;\ 0\ ;\ 3)$ et $B(4\ ;\ 1\ ;\ 0)$.
Une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

a. $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 3+t \\ y &=& 1 \\ z &=& -3+3t \end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$ **b.** $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1+4t \\ y &=& t \\ z &=& 3 \end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$

c. $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1+3t \\ y &=& t \\ z &=& 3-3t \end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$ **d.** $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 4+t \\ y &=& 1 \\ z &=& 3-3t \end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$

2. Parmi les points suivants, lequel appartient à la droite (d) ?

a. $M(7\ ;\ 6\ ;\ 6)$ **b.** $N(3\ ;\ 6\ ;\ 4)$ **c.** $P(4\ ;\ 6\ ;\ -2)$ **d.** $R(-3\ ;\ -9\ ;\ 7)$

3. On considère la droite (d') de représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& -2+3k \\ y &=& -1-2k \\ z &=& 1+k \end{array}\right. \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

Les droites (d) et (d') sont:

a. sécantes **b.** non coplanaires **c.** parallèles **d.** confondues

4. On considère le plan (P) passant par le point $I(2\ ;\ 1\ ;\ 0)$ et perpendiculaire à la droite (d). Une équation du plan (P) est :

a. $2x+3y-z-7=0$ **b.** $-x+y-4z+1=0$ **c.** $4x+6y-2z+9=0$ **d.** $2x+y+1=0$

Exercice 34 -- *Baccalauréat Asie 10 juin 2024* ★★

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse puis justifier la réponse donnée.
Toute réponse non argumentée ne sera pas prise en compte.

1. **Affirmation 1** : Toute suite décroissante et minorée par 0 converge vers 0.
2. On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ telle que, pour tout entier n,on a $u_n \leqslant \dfrac{-9^n+3^n}{7^n}$.

   Affirmation 2 : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.
3. On considère la fonction suivante écrite en langage Python.
   Affirmation 3 : terme(4) renvoie la valeur 7.

```python
def terme(n):
    u = 1
    for i in range(n):
        u = u+i
    return u
```

4. Lors d'un concours, le gagnant a le choix entre deux prix :
   - Prix A : il reçoit $1\,000$ euros par jour pendant 15 jours ;
   - Prix B : il reçoit 1 euro le 1er jour, 2 euros le 2e jour, 4 euros le 3e jour et pendant 15 jours la somme reçue double chaque jour.

   Affirmation 4 : La valeur du prix A est plus élevée que la valeur du prix B.
5. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $v_n = \displaystyle\int_1^n \ln x \, \mathrm{d}x$. **Affirmation 5** : La suite (v_n) est croissante.

Exercice 35 -- *Baccalauréat Métropole 19 juin 2024* ★★

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 5x\mathrm{e}^{-x}$.
   On note C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
   Affirmation 1 : L'axe des abscisses est une asymptote horizontale à la courbe C_f.

   Affirmation 2 : La fonction f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) : $y' + y = 5\mathrm{e}^{-x}$.
2. On considère les suites (u_n), (v_n) et (w_n), telles que, pour tout entier naturel n : $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$. De plus, la suite (u_n) converge vers -1 et la suite (w_n) converge vers 1 .
   Affirmation 3 : La suite (v_n) converge vers un nombre réel ℓ appartenant à l'intervalle $[-1;1]$.
   On suppose de plus que la suite (u_n) est croissante et que la suite (w_n) est décroissante.
   Affirmation 4 : Pour tout entier naturel n, on a alors : $u_0 \leqslant v_n \leqslant w_0$.

Exercice 36 - *Baccalauréat Polynésie 19 juin 2024* ★

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Dans cet exercice, les questions sont indépendantes les unes des autres.
Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$, on considère les points: A$(2\,;\,1\,;\,-1)$, B$(-1\,;\,2\,;\,1)$ et C$(5\,;\,0\,;\,-3)$.
On note $\mathcal{P}$ le plan d'équation cartésienne: $x+5y-2z+3=0$.
On note $\mathcal{D}$ la droite de représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{rcr} x & = & -t+3 \\ y & = & t+2 \\ z & = & 2t+1 \end{array}\right. ,\ t \in \mathbb{R}.$$

Affirmation 1 : Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ est normal au plan (OAC).
Affirmation 2 : Les droites $\mathcal{D}$ et (AB) sont sécantes au point C.
Affirmation 3 : La droite $\mathcal{D}$ est parallèle au plan $\mathcal{P}$.
Affirmation 4 : Le plan médiateur du segment [BC], noté Q, a pour équation cartésienne : $3x-y-2z-7=0$.